

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## *Δυναμική Ανάλυση των Συστημάτων Πρώτης Τάξης*

---

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4, η δυναμική μελέτη ενός φυσικού/ χημικού συστήματος οδηγεί συχνά στη διερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς μιας γραμμικής, μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται λεπτομερώς η δυναμική απόκριση ενός συστήματος πρώτης τάξης σε πρότυπες μεταβολές της μεταβλητής εισόδου. Συγκεκριμένα, δίνονται παραδείγματα φυσικών και χημικών διεργασιών πρώτης τάξης και προσδιορίζεται αναλυτικά, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η δυναμική απόκρισή τους σε παλμική, βηματική και ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου.

### 5.1 Γενική Περιγραφή Συστήματος Πρώτης Τάξης

Η δυναμική συμπεριφορά πολλών φυσικών και χημικών διεργασιών περιγράφεται συχνά από την ακόλουθη γραμμική, μη ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p u(t) \quad ; \quad y(t=0) = y_0 \quad (5.1)$$

$y(t)$  : είναι η μεταβλητή κατάστασης /εξόδου

$u(t)$  : είναι η μεταβλητή εισόδου (π.χ., μεταβλητή ελέγχου ή διαταραχή)

$\tau$  : είναι η χαρακτηριστική χρονική σταθερά της διεργασίας

$K_p$  : είναι η σταθερά ενίσχυσης (gain) της διεργασίας

Στη μόνιμη κατάσταση οι μεταβλητές εισόδου και εξόδου θα είναι ανεξάρτητες του χρόνου, που σημαίνει ότι η χρονική παράγωγος ( $dy/dt$ ) θα είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, η εξίσωση (5.1) γράφεται:

$$y_s = K_p u_s \quad (5.2)$$

όπου  $y_s$  και  $u_s$  δηλώνουν τις αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών εξόδου και εισόδου στη μόνιμη κατάσταση. Ακολουθώντας, ορίζουμε τις μεταβλητές απόκλισης  $Y(t)$  και  $U(t)$ :

$$Y(t) = y(t) - y_s \quad ; \quad U(t) = u(t) - u_s \quad (5.3)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (5.2) από την εξίσωση (5.1) και θεωρώντας ότι αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία (δηλαδή,  $y_s = y_o$ ), λαμβάνουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K_p U(t) \quad ; \quad Y(t=0) = 0 \quad (5.4)$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η εξίσωση (5.4) μετατρέπεται εύκολα στην ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση:

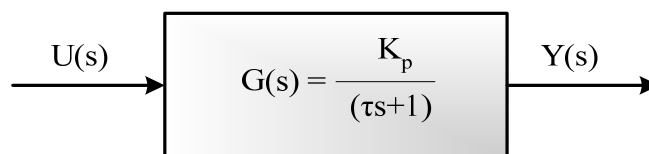
$$\tau s Y(s) + Y(s) = K_p U(s) \quad (5.5)$$

ή

$$Y(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)} U(s) = G(s) U(s) \quad (5.6)$$

Η  $G(s)$  ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας. Η εξίσωση (5.6) παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 5.1. Είναι φανερό ότι η μετασχηματισμένη μεταβλητή εξόδου  $Y(s)$  θα δίνεται από το γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας και της μετασχηματισμένης μεταβλητής εισόδου,  $U(s)$ . Το τελευταίο αποτέλεσμα θα ισχύει για όλες τις διεργασίες MEME (μιας μεταβλητής εισόδου – μιας μεταβλητής εξόδου) ανεξάρτητα από την τάξη της διαφορικής εξίσωσης.

Για γραμμικά συστήματα ισχύει η αρχή της υπέρθεσης, δηλαδή η συνολική απόκριση μιας διεργασίας,  $Y(t)$ , στη συνδυασμένη μεταβολή του σήματος εισόδου  $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$ ,



**Εικόνα 5.1:** Συνάρτηση μεταφοράς διεργασίας πρώτης τάξης.

δίνεται από το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων  $Y_1(t)$  και  $Y_2(t)$  της διεργασίας στις αντίστοιχες μεταβολές  $U_1(t)$  και  $U_2(t)$ .

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.6), η μετασχηματισμένη μεταβλητή εξόδου υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Y(s) = G(s) U(s) = G(s) [U_1(s) + U_2(s)] = Y_1(s) + Y_2(s) \quad (5.7)$$

Συνεπώς, η χρονική μεταβολή της  $Y(t)$  θα δίνεται από το άθροισμα των επί μέρους χρονικών αποκρίσεων των  $Y_1(t)$  και  $Y_2(t)$ :

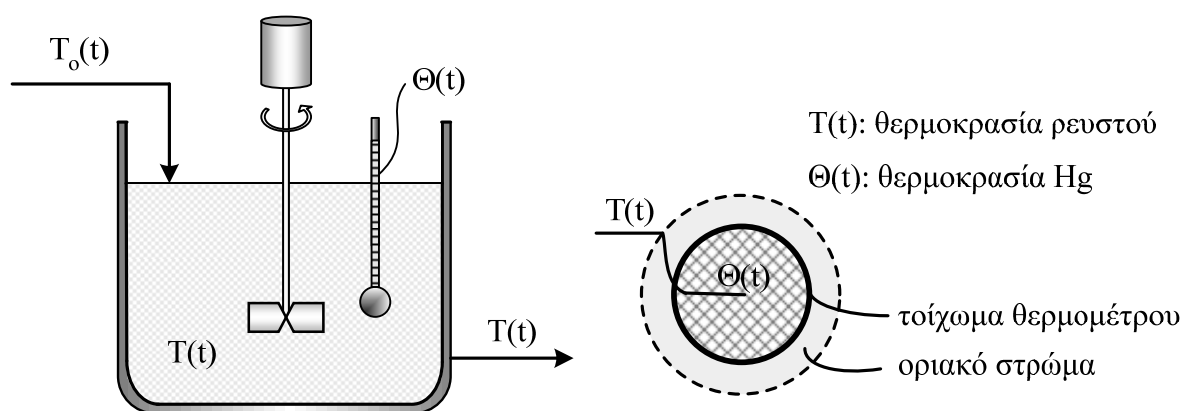
$$Y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = L^{-1} \{Y_1(s) + Y_2(s)\} = L^{-1} \{G(s)[U_1(s) + U_2(s)]\} = Y_1(t) + Y_2(t) \quad (5.8)$$

## 5.2 Παραδείγματα Συστημάτων Πρώτης Τάξης

### 5.2.1 Δυναμική Απόκριση Θερμομέτρου

Θεωρούμε ότι ένα θερμόμετρο υδραργύρου είναι εμβαπτισμένο σε ένα δοχείο συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης (βλέπε Εικόνα 5.2).

Θεωρούμε επίσης ότι η θερμοκρασία του θερμομέτρου,  $\Theta(t)$ , είναι ανεξάρτητη των χωρικών συντεταγμένων και η μόνη αντίσταση στη μεταφορά θερμότητας βρίσκεται στο οριακό στρώμα του ρευστού που περιβάλλει το εμβαπτισμένο θερμόμετρο. Συνεπώς, η δυναμική συμπεριφορά του θερμομέτρου, δηλαδή της θερμοκρασίας  $\Theta(t)$ , στις μεταβολές της θερμοκρασίας  $T(t)$  του ρευστού στο δοχείο θα περιγράφεται από το ακόλουθο δυναμικό ισοζύγιο ενέργειας:



**Εικόνα 5.2:** Θερμόμετρο υδραργύρου και διατομή θερμομέτρου.

$$M_{\text{Hg}} C_{p,\text{Hg}} \frac{d\Theta}{dt} = hA (T(t) - \Theta(t)) \quad (5.9)$$

όπου  $M_{\text{Hg}}$  (kg) και  $C_{p,\text{Hg}}$  (kJ/(kg·K)) είναι η συνολική μάζα και η ειδική θερμότητα του θερμομέτρου, αντίστοιχα.  $h$  (kJ/(m<sup>2</sup>·s·K)) είναι ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας και  $A$  (m<sup>2</sup>) είναι η εξωτερική επιφάνεια του θερμομέτρου. Στη μόνιμη κατάσταση, ( $d\Theta/dt = 0$ ), η θερμοκρασία του θερμομέτρου θα είναι σταθερή, δηλαδή θα ισχύει:  $\Theta_s = T_s$ . Ακολουθώντας, εισάγουμε τις μεταβλητές απόκλισης:

$$U(t) = T(t) - T_s \quad ; \quad Y(t) = \Theta(t) - \Theta_s$$

Συναρτήσει των μεταβλητών απόκλισης, η εξίσωση (5.9) γράφεται:

$$\tau \frac{dY}{dt} + Y(t) = U(t) \quad ; \quad Y(t=0) = 0 \quad (5.10)$$

όπου  $\tau$  είναι η χαρακτηριστική χρονική σταθερά του θερμομέτρου.

$$\tau = \frac{M_{\text{Hg}} C_{p,\text{Hg}}}{hA}, \text{ (χρόνος)} \quad (5.11)$$

Στη συνέχεια, μετασχηματίζουμε κατά Laplace την εξίσωση (5.10):

$$Y(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} U(s) \quad (5.12)$$

Συνεπώς, η ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του θερμομέτρου σε πρότυπες μεταβολές της θερμοκρασίας του ρευστού στο δοχείο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της εξίσωσης (5.12).

### 5.2.2 Μεταβολή της Στάθμης ενός Ρευστού σε Κυλινδρική Δεξαμενή

Σύμφωνα με την ανάλυση της ενότητας 3.2.1, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή του ύψους ενός ρευστού στο κυλινδρικό δοχείο της Εικόνας 3.3 έχει ως εξής:

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{h(t)}{R} = q_o(t) \quad , \quad h(t=0) = h_o \quad (5.13)$$

Ο όρος  $(h(t)/R)$  φανερώνει ότι το ρεύμα εκροής εξαρτάται γραμμικά από το ύψος του ρευστού στη δεξαμενή.  $R$  (s·m<sup>-2</sup>) είναι η σταθερά αντίστασης στην εκροή του ρευστού από

τη δεξαμενή. Στη μόνιμη κατάσταση ( $dh/dt = 0$ ), το ύψος του ρευστού στη δεξαμενή θα είναι σταθερό. Συνεπώς, η εξίσωση (5.13) γράφεται:

$$\frac{h_s}{R} = q_{os} \quad (5.14)$$

Θεωρούμε ότι για  $t=0$ ,  $h(t=0) = h_o = h_s$ . Αφαιρώντας την εξίσωση (5.14) από την εξίσωση (5.13) και εισάγοντας τις μεταβλητές απόκλισης  $H(t) = (h(t) - h_s)$  και  $Q_o(t) = (q(t) - q_s)$ , λαμβάνουμε τελικά την ακόλουθη διατύπωση του δυναμικού μοντέλου της δεξαμενής:

$$\frac{Ad(h(t) - h_s)}{dt} + (h(t) - h_s) \frac{1}{R} = (q_o(t) - q_{os}) \quad (5.15)$$

ή

$$AR \frac{dH}{dt} + H(t) = RQ_o(t) \quad , \quad H(t=0) = 0 \quad (5.16)$$

Στη συνέχεια, μετασχηματίζουμε κατά Laplace την εξίσωση (5.16):

$$H(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)} Q_o(s) \quad (5.17)$$

όπου  $\tau (=AR)$  και  $K_p (=R)$  είναι αντίστοιχα η χρονική σταθερά και η σταθερά ενίσχυσης της διεργασίας.

Παρόμοια, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή του ρεύματος εξόδου,  $Q(t)$ , συναρτήσει του ρεύματος εισόδου,  $Q_o(t)$ , δίνεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$A \frac{dH}{dt} = AR \frac{dQ}{dt} = Q_o(t) - Q(t) \quad ; \quad H(t) = RQ(t) \quad (5.18)$$

ή

$$\tau \frac{dQ}{dt} + Q(t) = Q_o(t) \quad (5.19)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την εξίσωση (5.19), λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$Q(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} Q_o(s) \quad (5.20)$$

Ακολούθως, για διάφορες μεταβολές του  $Q_o(t)$  (π.χ., βηματική, παλμική, κλπ.) υπολογίζουμε τη χρονική απόκριση του  $H(t)$  ή  $Q(t)$  από την επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης (5.17) ή (5.20) με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

### 5.2.3 Διεργασία Ανάμιξης Πρώτης Τάξης

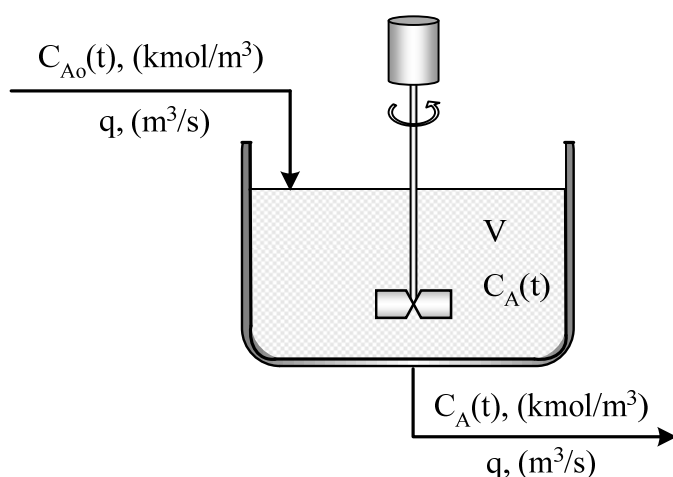
Θεωρούμε τη διεργασία συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης της Εικόνας 5.3. Η ογκομετρική παροχή  $q$  παραμένει σταθερή. Ακολουθώντας, διατυπώνουμε το δυναμικό ισοζύγιο γραμμομορίων για το συστατικό A:

$$V \frac{dC_A}{dt} = qC_{Ao}(t) - qC_A(t) \quad , \quad C_A(t=0) = C_A(0) = C_{As} \quad (5.21)$$

Στη μόνιμη κατάσταση ( $dC_A/dt = 0$ ), η συγκέντρωση του A θα είναι σταθερή,  $C_{As}$ , και συνεπώς:

$$C_{Aos} - C_{As} = 0 \quad (5.22)$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές απόκλισης,  $U(t) = (C_{Ao}(t) - C_{Aos})$  και  $Y(t) = (C_A(t) - C_{As})$ , στην εξίσωση (5.21) λαμβάνουμε τελικά την ακόλουθη διατύπωση του δυναμικού μοντέλου της διεργασίας:



**Εικόνα 5.3:** Διεργασία συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης.

$$\tau \frac{dY}{dt} + Y(t) = U(t) \quad ; \quad Y(t=0) = 0 \quad (5.23)$$

όπου  $\tau = (V/q)$  είναι ο μέσος χρόνος παραμονής του ρευστού στο δοχείο.

Από το μετασχηματισμό κατά Laplace της εξίσωσης (5.23), υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των  $U(s)$  και  $Y(s)$ .

$$Y(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} U(s) \quad (5.24)$$

#### 5.2.4 Αντιδραστήρας Συνεχούς Λειτουργίας και Πλήρους Ανάμιξης

Θεωρούμε ότι η αντίδραση πρώτης τάξης  $A \rightarrow P$  ( $r_A = kC_A$ ,  $\text{kmol}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$ ) προχωρεί ισοθερμοκρασιακά στον αντιδραστήρα συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης της Εικόνας 5.3. Το δυναμικό ισοζύγιο γραμμομορίων για το συστατικό A στον αντιδραστήρα θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$V \frac{dC_A}{dt} = qC_{A0}(t) - qC_A(t) - VkC_A(t) \quad , \quad C_A(t=0) = C_A(0) = C_{As} \quad (5.25)$$

Στη μόνιμη κατάσταση, η εξίσωση (5.25) γράφεται:

$$0 = qC_{A0s} - qC_{As} - VkC_{As} \quad (5.26)$$

Στη συνέχεια, αφαιρούμε την εξίσωση (5.26) από την εξίσωση (5.25):

$$\frac{Vd(C_A(t) - C_{As})}{dt} = q(C_{A0}(t) - C_{A0s}) - q(C_A(t) - C_{As}) - Vk(C_A(t) - C_{As}) \quad (5.27)$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές απόκλισης,  $Y(t) = (C_A(t) - C_{As})$  και  $U(t) = (C_{A0}(t) - C_{A0s})$ , και μετασχηματίζοντας κατά Laplace την εξίσωση (5.27), λαμβάνουμε τελικά την ακόλουθη σχέση:

$$Y(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)} U(s) \quad (5.28)$$

όπου  $\tau$  είναι η φαινομενική χρονική σταθερά της διεργασίας και  $K_p$  η σταθερά ενίσχυσης.

$$\tau = \frac{1}{(q/V)+k} = \frac{t_r t_a}{t_r + t_a} \quad ; \quad K_p = \frac{q}{Vk+q} = \frac{t_a}{t_r + t_a} \quad (5.29)$$

$t_a=(1/k)$  είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος χημικής αντίδρασης πρώτης τάξης και  $t_r=(V/q)$  ο μέσος χρόνος παραμονής του ρευστού στο δοχείο (βλέπε Κεφάλαιο 2).

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.29), η φαινομενική χρονική σταθερά,  $\tau$ , της διεργασίας με χημική αντίδραση θα είναι μικρότερη της  $t_r$ , δηλαδή της χρονικής σταθεράς της διεργασίας ανάμιξης χωρίς χημική αντίδραση. Συνεπώς, η απόκριση του δυναμικού συστήματος με χημική αντίδραση, σε μεταβολές του σήματος εισόδου, θα είναι γρηγορότερη από εκείνη ενός συστήματος ανάμιξης χωρίς χημική αντίδραση (βλέπε επίσης ενότητα 3.2.4). Η παραπάνω ανάλυση αναφέρεται για αντιδράσεις πρώτης τάξης. Για χημικές αντιδράσεις μεγαλύτερης τάξης ( $n>1$ ), το δυναμικό μοντέλο της διεργασίας θα είναι μη γραμμικό.

### 5.3 Μεταβατική Απόκριση Συστημάτων Πρώτης Τάξης

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τη χρονική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης σε πρότυπες μεταβολές (π.χ., παλμική, βηματική και ημιτονοειδή) του σήματος εισόδου.

#### 5.3.1 Απόκριση Συστήματος Πρώτης Τάξης σε Παλμική Μεταβολή

Θεωρούμε ότι η παλμική μεταβολή  $U(t) = \alpha \delta(t)$  εισέρχεται σε μια διεργασία πρώτης τάξης. Σύμφωνα με τον Πίνακα Α.1, ο μετασχηματισμός Laplace μιας παλμικής μεταβολής μεγέθους,  $\alpha$ , είναι:

$$U(s) = \alpha \quad (5.30)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.30) στην εξίσωση (5.6) λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{K_p \alpha}{(\tau s + 1)} = \frac{K_p \alpha / \tau}{(s + 1/\tau)} \quad (5.31)$$

Η χρονική απόκριση της  $Y(t)$  υπολογίζεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της  $Y(s)$ , δηλαδή

$$Y(t) = L^{-1} \{ Y(s) \} = L^{-1} \left\{ \frac{K_p \alpha / \tau}{(s + 1/\tau)} \right\} = \frac{K_p \alpha}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (5.32)$$



Από την εξίσωση (5.32) υπολογίζονται εύκολα οι τιμές της  $Y(t)$  στις χρονικές στιγμές  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau$  και  $4\tau$ .

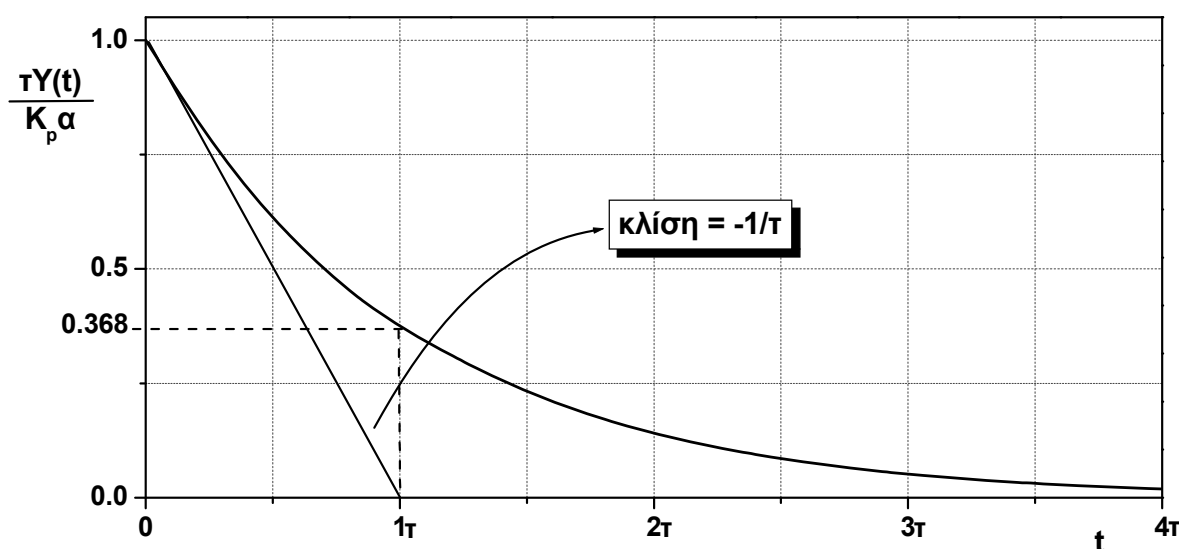
$$\begin{aligned} t/\tau = 0 & , \quad \tau Y(0)/K_p \alpha = e^0 = 1 & ; & \quad Y(0) = (K_p \alpha / \tau) \\ t/\tau = 1 & , \quad \tau Y(\tau)/K_p \alpha = e^{-1} = 0,368 & ; & \quad Y(\tau) = 0,368(K_p \alpha / \tau) \\ t/\tau = 2 & , \quad \tau Y(2\tau)/K_p \alpha = e^{-2} = 0,135 & ; & \quad Y(2\tau) = 0,135(K_p \alpha / \tau) \\ t/\tau = 3 & , \quad \tau Y(3\tau)/K_p \alpha = e^{-3} = 0,050 & ; & \quad Y(3\tau) = 0,050(K_p \alpha / \tau) \\ t/\tau = 4 & , \quad \tau Y(4\tau)/K_p \alpha = e^{-4} = 0,018 & ; & \quad Y(4\tau) = 0,018(K_p \alpha / \tau) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι σε τέσσερις χρονικές σταθερές, η τιμή της  $Y(t)$  γίνεται περίπου ίση με μηδέν, που σημαίνει ότι το δυναμικό σύστημα μετά από χρόνο  $t \geq 4\tau$  επανέρχεται στο αρχικό σημείο ισορροπίας του (δηλαδή,  $y(t \geq 4\tau) \approx y_s$ ). Είναι φανερό ότι η χρονική μεταβολή της  $y(t)$  θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$y(t) = y_s + Y(t) = y_s + \frac{K_p \alpha}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (5.33)$$

Στην Εικόνα 5.4 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης ( $\tau Y(t)/K_p \alpha$ ) ως προς  $t$ . Παρατηρούμε ότι η κλίση της αδιάστατης απόκρισης ( $\tau Y(t)/K_p \alpha$ ) στο σημείο  $t = 0$ , είναι ίση με  $(-1/\tau)$ .

$$d(\tau Y(t)/K_p \alpha)/dt \Big|_{t=0} = -(1/\tau) \quad (5.34)$$



Εικόνα 5.4: Γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης ως προς το χρόνο,  $t$ .

Η επαλήθευση του αποτελέσματος της εξίσωσης (5.32) και η γραφική της παράσταση μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.

```

1  % Ενότητα 5.3.1: Απόκριση Συστήματος 1ης Τάξης σε Παλμική Μεταβολή
2
3  Kp = 17 ; % καθορισμός της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας
4  T = 2;   % καθορισμός της χρονικής σταθεράς της διεργασίας
5  sys = tf([Kp],[T 1]) ; % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς
6  a = 3;   % μέγεθος της παλμικής μεταβολής - U(s) = a*sδ(t)
7
8  [y,t] = impulse(sys*a, 4*T) ; % υπολογισμός της απόκρισης έως t=4t
9  Yd = T*y/(Kp*a) ;           % υπολογισμός της αδιάστατης απόκρισης
10 plot(t,Yd,'k-')           % σχεδίαση της γραφικής παράστασης
11 grid on                   % εισαγωγή των γραμμών πλέγματος
12
13 % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
14 xlabel('\chi\rho\iota\sigma\epsilon\tau\alpha, t')
15 % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
16 ylabel('\tau Y(t)/(Kp*\alpha)')
17 % εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
18 title(['\Delta\iota\alpha\alpha\sigma\tau\alpha\epsilon\tau\alpha \pi\iota\epsilon\rho\iota\sigma\epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha',...
19        '\kappa\rho\iota\sigma\epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha',...
20        '\lambda\mu\iota\sigma\epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha \epsilon\tau\alpha',...
21        '\lambda\epsilon\tau\alpha'])

```

**Παράδειγμα 5.1: Πειραματικός προσδιορισμός του δυναμικού μοντέλου διεργασίας**

Δίνονται οι ακόλουθες πειραματικές μετρήσεις της χρονικής απόκρισης,  $Y(t) = (y(t) - y_s)$ , μιας διεργασίας πρώτης τάξης σε παλμική μεταβολή του σήματος εισόδου, μεγέθους  $U(t) = 4\delta(t)$ . Με τη βοήθεια δύο τουλάχιστον μεθόδων να προσδιορίσετε τη χρονική σταθερά,  $\tau$ , και τη σταθερά ενίσχυσης,  $K_p$ , της διεργασίας.

<i>t(min)</i>	5	7,5	10	15	22	30	45	60	75	90	105	120	150
<i>Y(t)</i>	0,9	0,85	0,75	0,68	0,54	0,44	0,33	0,20	0,14	0,12	0,07	0,05	0,04

Λύση:

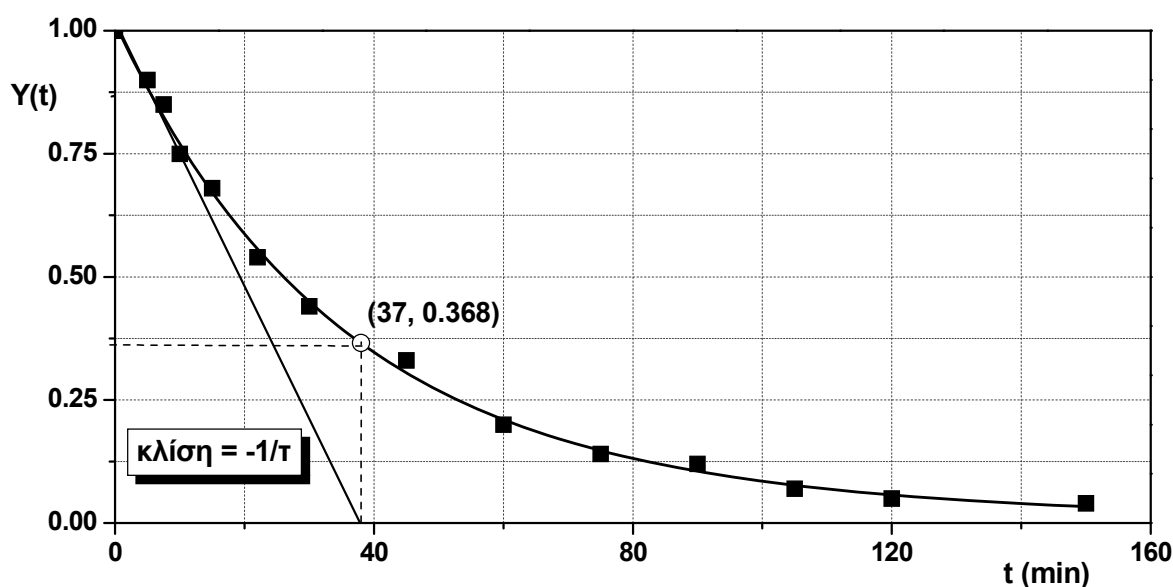
Αρχικά κάνουμε τη γραφική παράσταση των πειραματικών τιμών της  $Y(t)$  ως προς το χρόνο (βλέπε Εικόνα 5.5). Παρατηρούμε ότι για  $t = 0$  η τιμή της  $Y(t=0)$  είναι ίση με 1. Γνωρίζουμε επίσης ότι για  $t = 0$  η τιμή της αδιάστατης απόκρισης είναι:  $\tau Y(0)/K_p a = 1$ . Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $\tau = K_p a$  και επειδή το μέγεθος της παλμικής μεταβολής είναι  $a = 4$ , η τιμή της σταθεράς ενίσχυσης θα είναι ίση με  $K_p = \tau/4$ .

Ακολουθώντας, από την εξίσωση (5.32) υπολογίζουμε την κλίση της  $Y(t)$  σε χρόνο  $t = 0$ :

$$\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{K_p a}{\tau} \left( -\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη της  $Y(t)$  στο σημείο  $t = 0$  θα έχει κλίση ίση με  $-1/\tau$ , δηλαδή θα τέμνει τον άξονα του χρόνου στο σημείο  $t = \tau$ . Από τη γραφική παράσταση της  $Y(t)$  (βλέπε Εικόνα 5.5), προκύπτει ότι η εφαπτόμενη της  $Y(t)$  στο σημείο  $t = 0$  τέμνει τον άξονα του χρόνου στο σημείο  $\tau \approx 37$  min. Επομένως, η τιμή της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας θα είναι ίση με  $K_p = \tau/4 = 9,25$ .

Εναλλακτικά, η τιμή της χρονικής σταθεράς μπορεί να υπολογισθεί από το διάγραμμα της  $Y(t)$  ως προς  $t$ . Συγκεκριμένα, για  $t = \tau$ , η τιμή της  $Y(t)$  θα είναι ίση με  $Y(\tau) = (K_p a / \tau) e^{-1} = e^{-1} = 0,368$  (επειδή  $K_p a = \tau$ ). Από την Εικόνα 5.5 παρατηρούμε ότι



Εικόνα 5.5: Γραφική παράσταση της  $Y(t)$  ως προς  $t$ .

η τιμή της  $Y(t)$  είναι ίση με 0,368 σε χρόνο  $t = \tau = 37$  min. Τέλος, η τιμή της χρονικής σταθεράς  $\tau$  μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Αρχικά, παίρνουμε τους λογαρίθμους στην εξίσωση (5.32). Ακολούθως, υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας γραμμής, που προκύπτει από τη γραφική παράσταση της  $\ln Y(t)$  ως προς το  $t$  ή, εναλλακτικά, εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να επιλυθεί και με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter5\leg5_1.m
File Edit Text Desktop Window Help
1  % Παράδειγμα 5.1: Πειραματικός προσδιορισμός του δυναμικού
2  %
3  %
4  % Εισαγωγή των πειραματικών μετρήσεων
5  t = [0 5 7.5 10 15 22 30 45 60 75 90 105 120 150] ;
6  Y = [1 0.9 0.85 0.75 0.68 0.54 0.44 0.33 0.2 0.14 ...
7      0.12 0.07 0.05 0.04] ;
8  % Προσέγγιση της πειραματικής καμπύλης με πολυώνυμο 4ου βαθμού
9  fit = polyfit(t,Y,4);      yfit = polyval(fit,t);
10 % Υπολογισμός της παραγώγου της πολυωνυμικής εξίσωσης
11 der = polyder(fit) ;
12 % Υπολογισμός της παραγώγου σε χρόνο t=0
13 yder = polyval(der,0) ;
14 % Υπολογισμός των σημείων της εξίσωσης εφαπτομένης στο σημείο t=0
15 yef = yder*t + 1 ;
16 % Εύρεση της ευθείας της εφαπτομένης από τα σημεία
17 yefap = polyval(yef,t) ;
18 % Υπολογισμός της χρονικής σταθεράς
19 time = -1/yder
20 % Προσδιορισμός των καθέτων στους άξονες στο σημείο (36.7,0.368)
21 x1 = [0 time] ;
22 y1 = [0.368 0.368] ;
23 x2 = [time time] ;
24 y2 = [0.368 0] ;
25 % Γραφική παράσταση
26 plot(t,Y,'o',t,yfit,'r',t,yef,'--',x1,y1,':',x2,y2,':') ;
27 AXIS([0 160 0 1])
28 xlabel('t, min')
29 ylabel('Y(t)')
30 text(-8,0.368,'0.368')
31 text(30,-0.05,'\tau = 36.7')
32 text(13,0.15,'\kappa\lambda\iota\sigma\eta\eta = -1/\tau\rightarrow')
33 grid
script Ln 33 Col 9 OVR

```

### 5.3.2 Απόκριση Συστήματος Πρώτης Τάξης σε Βηματική Μεταβολή

Η γραφική παράσταση μιας βηματικής συνάρτησης μεγέθους  $\alpha$  παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.6. Η μαθηματική της διατύπωση δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$U(t) = \alpha H(t - t_0) = \begin{cases} 0 & ; t < t_0 \\ \alpha & ; t \geq t_0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (A.19), ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης (5.35) είναι:

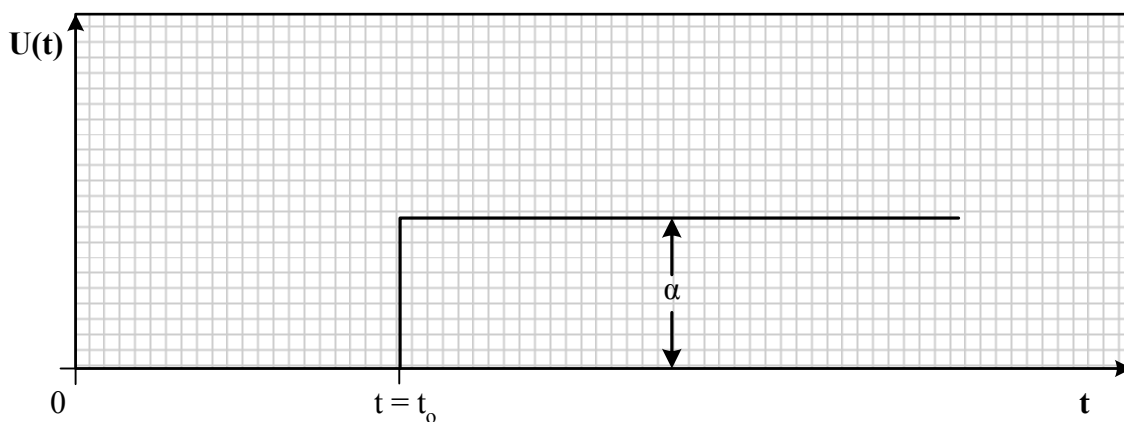
$$U(s) = \frac{\alpha}{s} e^{-st_0} \quad (5.36)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την απόκριση μιας διεργασίας πρώτης τάξης σε βηματική μεταβολή. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.36) στην εξίσωση (5.6) και θεωρώντας ότι  $t_0 = 0$ , λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)} \frac{\alpha}{s} = K_p \alpha \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 1/\tau)} \right] \quad (5.37)$$

Η χρονική απόκριση της  $Y(t)$  θα δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της  $Y(s)$ , δηλαδή

$$Y(t) = L^{-1} \{ Y(s) \} = L^{-1} \left\{ K_p \alpha \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 1/\tau)} \right) \right\} \quad (5.38)$$



**Εικόνα 5.6:** Βηματική συνάρτηση μεγέθους  $\alpha$ .

ή

$$Y(t) = K_p \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.39)$$

Ακολουθώντας, από την εξίσωση (5.39), υπολογίζονται οι τιμές της  $Y(t)$  στις χρονικές στιγμές  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau$  και  $4\tau$ .

$$\begin{aligned} t/\tau = 0 & \quad , \quad Y(0) = 0 \\ t/\tau = 1 & \quad , \quad Y(\tau) = K_p \alpha (1 - e^{-1}) = 0,632K_p \alpha \\ t/\tau = 2 & \quad , \quad Y(2\tau) = K_p \alpha (1 - e^{-2}) = 0,865K_p \alpha \\ t/\tau = 3 & \quad , \quad Y(3\tau) = K_p \alpha (1 - e^{-3}) = 0,950K_p \alpha \\ t/\tau = 4 & \quad , \quad Y(4\tau) = K_p \alpha (1 - e^{-4}) = 0,982K_p \alpha \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι σε τέσσερις περίπου χρονικές σταθερές, η  $Y(t)$  φθάνει στη νέα μόνιμη κατάσταση που είναι ίση με  $K_p \alpha$ . Είναι φανερό ότι η χρονική μεταβολή της πραγματικής μεταβλητής  $y(t)$  θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y(t) = y_0 + Y(t) = y_0 + K_p \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.40)$$

όπου  $y_0$  είναι η αρχική τιμή της  $y(t)$  για  $t = 0$ .

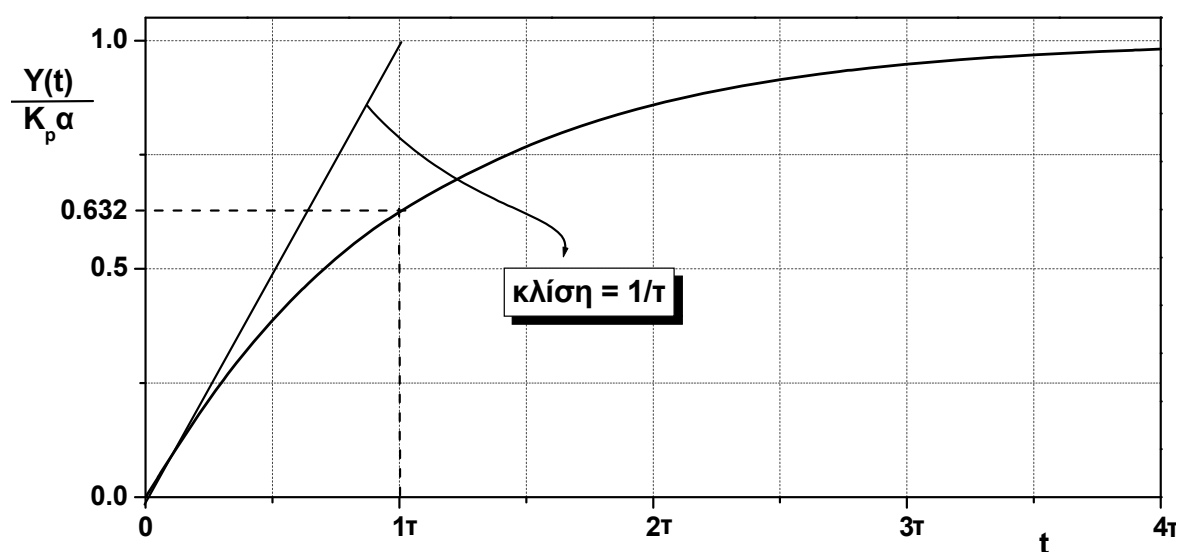
Η γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης ( $Y(t)/K_p \alpha$ ) ως προς το χρόνο  $t$  παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.7. Παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη της αδιάστατης απόκρισης στο σημείο  $t = 0$ , έχει κλίση ίση με  $1/\tau$ .

$$d(Y(t)/K_p \alpha) / dt \Big|_{t=0} = 1/\tau \quad (5.41)$$

**Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η σταθερά ενίσχυσης ενός ευσταθούς δυναμικού συστήματος,  $K_p$ , θα δίνεται από το λόγο της μόνιμης απόκλισης του σήματος εξόδου  $Y(t \rightarrow \infty)$  ως προς το μέγεθος της βηματικής μεταβολής του σήματος εισόδου:**

$$K_p = \frac{Y(t \rightarrow \infty)}{U(t \rightarrow \infty)} = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)} = \frac{K_p \alpha}{\alpha} \quad (5.42)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα ευσταθή δυναμικά συστήματα ανεξάρτητα της τάξης του συστήματος (π.χ., πρώτης, δεύτερης, τρίτης, κλπ.). Έτσι είναι εύκολο να προσδιορίσουμε πειραματικά την τιμή της  $K_p$  εάν γνωρίζουμε την αρχική και τελική τιμή της  $y(t)$  και το μέγεθος της βηματικής μεταβολής της  $u(t)$ .



Εικόνα 5.7: Γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης ( $Y(t)/K_p\alpha$ ) ως προς  $t$ .

Η επαλήθευση του αποτελέσματος της εξίσωσης (5.39) και η γραφική παράσταση της  $Y(t)$  ως προς  $t$  μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter5\Section5_3_2.m*
File Edit Text Desktop Window Help
1  % Ενότητα 5.3.2: Απόκριση Συστήματος 1ης Τάξης σε Βηματική Μεταβολή
2
3  Kp = 17;           % καθορισμός της σταθεράς ενίσχυσης|
4  T = 2;           % καθορισμός της χρονικής σταθεράς
5  sys = tf([Kp],[T 1]); % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς
6  a = 1;           % μέγεθος της βηματικής μεταβολής -U(s)=a*H(t)
7  [y,t] = step(sys*a); % υπολογισμός της απόκρισης y(t)
8  Yd = y/(Kp*a);   % υπολογισμός της αδιάστατης απόκρισης Y(t)
9  plot(t,Yd,'k-')  % σχεδίαση της γραφικής παράστασης
10 grid on          % εισαγωγή των γραμμών πλέγματος
11 % Εισαγωγή τίτλου του άξονα x
12 xlabel('\chi\rho\iota\sigma\tau\eta', 't');
13 % Εισαγωγή τίτλου του άξονα y
14 ylabel('Y(t)/(Kp*\alpha)');
15 % Εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
16 title(['A\delta\iota\alpha\sigma\tau\eta\eta A\pi\iota',...
17       '\kappa\rho\iota\sigma\tau\eta\sigma\epsilon\psi\iota\lambda\eta\mu',...
18       '\alpha\tau\iota\kappa\eta\eta M\epsilon\psi\iota\lambda\eta\beta\eta\sigma',...
19       '\lambda\eta\tau\eta'])
script Ln 3 Col 58 OVR

```

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η βηματική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης θα δίνεται από το χρονικό ολοκλήρωμα της παλμικής απόκρισης του δυναμικού συστήματος:

$$\text{Βηματική απόκριση} = \int_0^t (\text{Παλμική απόκριση}) dt$$

$$Y_{\beta}(t) = \int_0^t \left( \frac{K_p \alpha}{\tau} e^{-t'/\tau} \right) dt' = K_p \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.43)$$

Παρόμοια, η παλμική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης θα δίνεται από τη χρονική παράγωγο της βηματικής απόκρισης του δυναμικού συστήματος:

$$\text{Παλμική απόκριση} = \frac{d}{dt} (\text{Βηματική απόκριση})$$

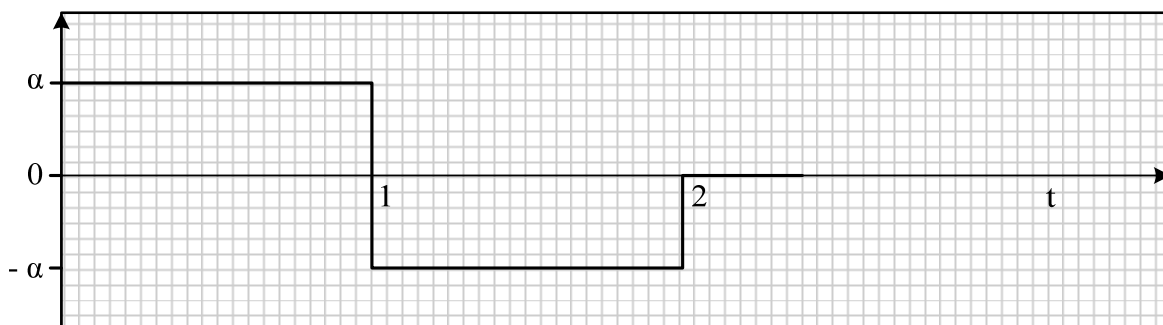
$$Y_{\pi}(t) = \frac{d}{dt} (K_p \alpha (1 - e^{-t/\tau})) = \frac{K_p \alpha}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (5.44)$$

Ακολουθώς, εξετάζουμε την απόκριση ενός συστήματος πρώτης τάξης σε μια πιο σύνθετη μεταβολή του σήματος εισόδου (βλέπε Εικόνα 5.8). Η χρονική συνάρτηση της ακολουθίας των βηματικών μεταβολών της Εικόνας 5.8 θα δίνεται από την εξίσωση (5.45):

$$U(t) = \alpha H(t - 0) - 2\alpha H(t - 1) + \alpha H(t - 2) \quad (5.45)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την εξίσωση (5.45) λαμβάνουμε:

$$L\{U(t)\} = \frac{\alpha}{s} - \frac{2\alpha}{s} e^{-s} + \frac{\alpha}{s} e^{-2s} \quad (5.46)$$



**Εικόνα 5.8:** Ακολουθία βηματικών μεταβολών.



Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.46) στην εξίσωση (5.6), λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)} \left( \frac{\alpha}{s} - \frac{2\alpha}{s} e^{-s} + \frac{\alpha}{s} e^{-2s} \right) \quad (5.47)$$

Η χρονική απόκριση της  $Y(t)$  θα δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της  $Y(s)$ , δηλαδή

$$Y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{K_p\alpha\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1/\tau)}\right)\right\} - L^{-1}\left\{2K_p\alpha\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1/\tau)}\right)e^{-s}\right\} + L^{-1}\left\{K_p\alpha\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1/\tau)}\right)e^{-2s}\right\} \quad (5.48)$$

Από τον Πίνακα A.1 και την εφαρμογή του θεωρήματος της χρονικής μετατόπισης συνάρτησης, υπολογίζεται εύκολα η χρονική απόκριση της  $Y(t)$  στην ακολουθία των βηματικών μεταβολών του σήματος εισόδου:

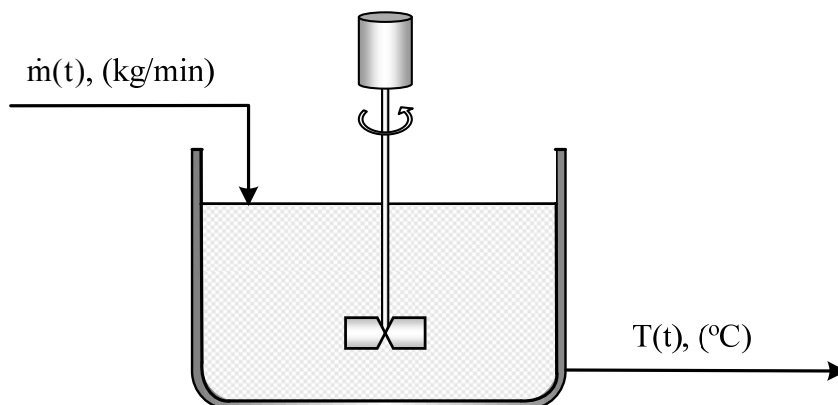
$$Y(t) = K_p\alpha(1 - e^{-t/\tau})H(t) - 2K_p\alpha(1 - e^{-(t-1)/\tau})H(t-1) + K_p\alpha(1 - e^{-(t-2)/\tau})H(t-2) \quad (5.49)$$

όπου  $H(t)$  είναι η γνωστή μοναδιαία συνάρτηση (βλέπε ενότητα A.2, Παράρτημα A).

**Παράδειγμα 5.2: Προσδιορισμός της σταθεράς ενίσχυσης,  $K_p$ , και της χρονικής σταθεράς,  $\tau$ , διεργασίας πρώτης τάξης**

Θεωρούμε ότι στον αντιδραστήρα συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης της Εικόνας 5.9, προχωρεί μια εξώθερμη χημική αντίδραση. Προκειμένου να υπολογίσουμε τη σταθερά ενίσχυσης,  $K_p$ , και τη χρονική σταθερά της διεργασίας,  $\tau$ , εισάγουμε στο σύστημα μια βηματική μεταβολή. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι, σε χρόνο  $t = 0$ , η μαζική παροχή του αντιδρώντος συστατικού στην είσοδο του αντιδραστήρα μεταβάλλεται από 120 σε 125 kg/min. Ταυτόχρονα, μετράμε τη χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας στην έξοδο του αντιδραστήρα:

$t$ (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	60
$T(t)$ (°C)	140,00	146,61	151,04	154,01	155,99	157,33	158,22	158,82	159,23	159,49	160,04



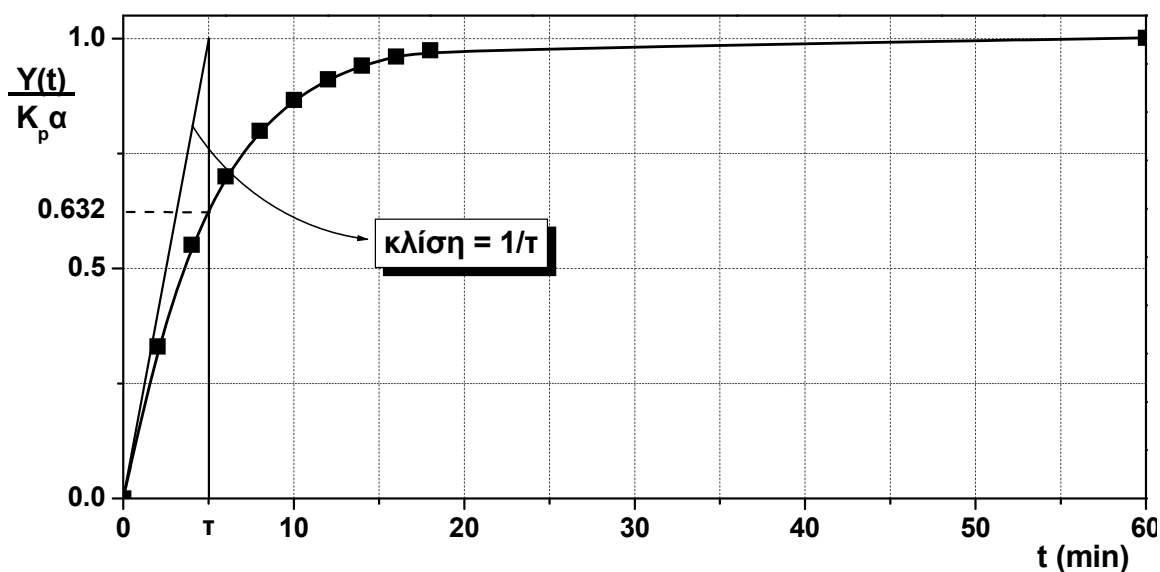
**Εικόνα 5.9:** Αντιδραστήρας συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης.

Λύση:

Από τον ορισμό της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας (βλέπε εξίσωση (5.42)), η τιμή της  $K_p$  θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$K_p = \frac{Y(t \rightarrow \infty)}{U(t \rightarrow \infty)} = \frac{T(\infty) - T(0)}{\dot{m}(\infty) - \dot{m}(0)} = \frac{160,04 - 140}{125 - 120} = \frac{20,04^\circ\text{C}}{5 \text{ kg/min}} = 4,01 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kg/min}}$$

Ακολουθώς, κάνουμε τη γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης  $(Y(t)/K_p\alpha) = (T(t) - 140)/20,04$  ως προς  $t$  (βλέπε Εικόνα 5.10). Παρατηρούμε ότι η εφαπτόμενη της αδιάστατης απόκρισης  $(Y(t)/K_p\alpha)$  στο σημείο  $t = 0$  έχει κλίση ίση με  $1/\tau$ .



**Εικόνα 5.10:** Γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης  $(Y(t)/K_p\alpha)$  ως προς  $t$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \frac{Y(t)}{K_p \alpha} \right) \right|_{t=0} = \frac{1}{\tau}$$

Συνεπώς, από την Εικόνα 5.10 προκύπτει ότι  $\tau = 5$  min. Εναλλακτικά, η τιμή της χρονικής σταθεράς  $\tau$  υπολογίζεται από την Εικόνα 5.10, αφού γνωρίζουμε ότι, για  $t = \tau$ , η τιμή της αδιάστατης απόκρισης είναι ίση με  $(Y(\tau)/K_p \alpha) = (1 - e^{-1}) = 0,632$ .

Τέλος, η τιμή της  $\tau$  μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Για το σκοπό αυτό, λογαριθμίζουμε την εξίσωση (5.39) και λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$-\ln \left( 1 - \frac{Y(t)}{K_p \alpha} \right) = \frac{t}{\tau}$$

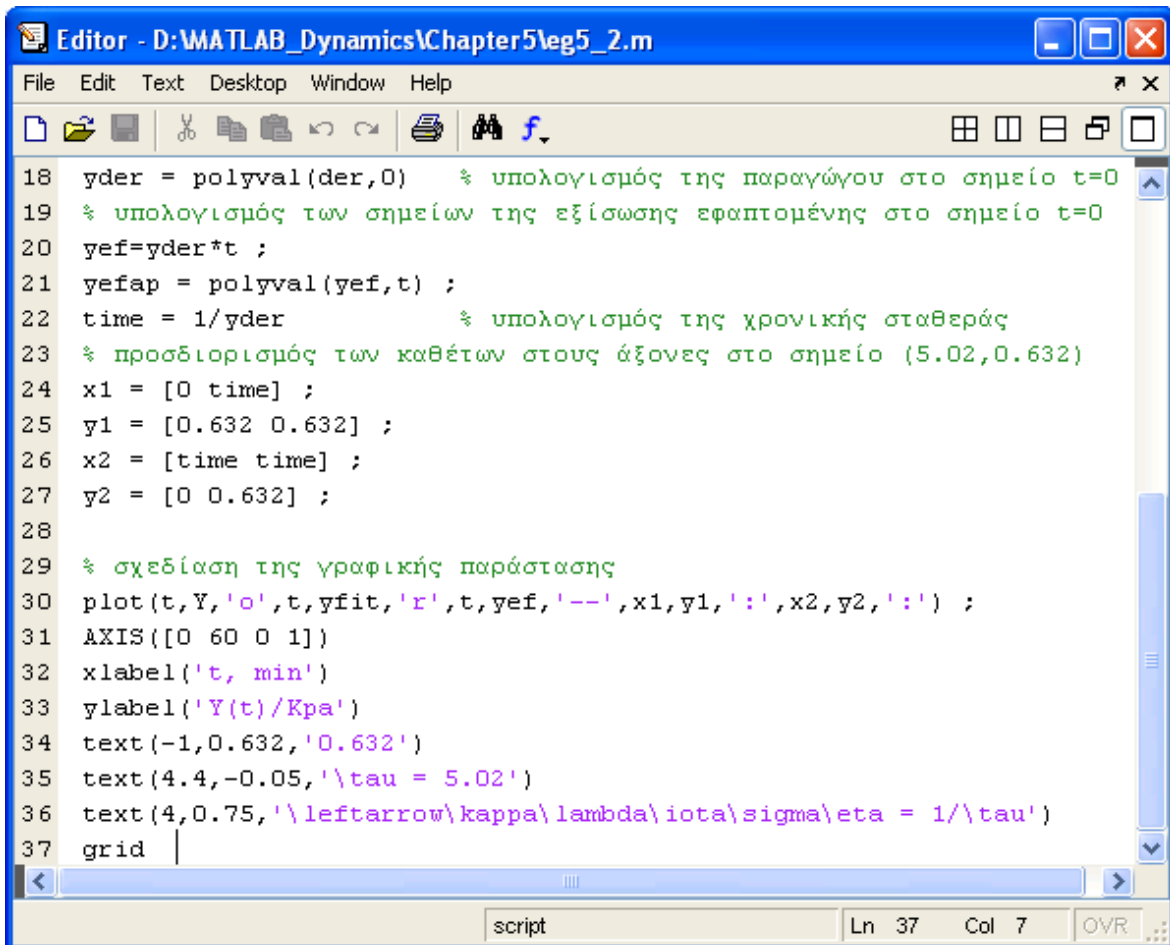
Η τιμή της χρονικής σταθεράς  $\tau$  υπολογίζεται από την κλίση της ευθείας γραμμής που προκύπτει από τη γραφική παράσταση της  $-\ln(1 - Y(t)/K_p \alpha)$  ως προς το  $t$ .

Εναλλακτικά, ο προσδιορισμός των παραμέτρων  $K_p$  και  $\tau$  μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter5\leg5_2.m
File Edit Text Desktop Window Help
1  % Παράδειγμα 5.2: Πειραματικός προσδιορισμός των Kp και τ
2  %                               διεργασίας πρώτης τάξης
3
4  % Εισαγωγή των πειραματικών δεδομένων
5  t = [0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 60] ;
6  y = [140 146.61 151.04 154.01 155.99 157.33 158.22 ...
7      158.82 159.23 159.49 160.04] ;
8  Kp = 4.01 ;
9  a = 5 ;
10 Y = (y-140)/(Kp*a) ;    % ορισμός της αδιάστατης απόκρισης
11
12 % προσομοίωση της καμπύλης της αδιάστατης απόκρισης με το
13 % χρόνο με πολυώνυμο έκτου βαθμού
14 fit = polyfit(t,Y,6) ;
15 yfit = polyval(fit,t) ;
16 % εύρεση της εξίσωσης της παραγώγου από την πολυωνυμική προσομοίωση
17 der = polyder(fit) ;
script                               Ln 17 Col 25 OVR

```



```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter5\eg5_2.m
File Edit Text Desktop Window Help
18 yder = polyval(der,0) % υπολογισμός της παραγώγου στο σημείο t=0
19 % υπολογισμός των σημείων της εξίσωσης εφαπτομένης στο σημείο t=0
20 yef=yder*t ;
21 yefap = polyval(yef,t) ;
22 time = 1/yder % υπολογισμός της χρονικής σταθεράς
23 % προσδιορισμός των καθέτων στους άξονες στο σημείο (5.02,0.632)
24 x1 = [0 time] ;
25 y1 = [0.632 0.632] ;
26 x2 = [time time] ;
27 y2 = [0 0.632] ;
28
29 % σχεδίαση της γραφικής παράστασης
30 plot(t,Y,'o',t,yfit,'r',t,yef,'--',x1,y1,':',x2,y2,':') ;
31 AXIS([0 60 0 1])
32 xlabel('t, min')
33 ylabel('Y(t)/Kpa')
34 text(-1,0.632,'0.632')
35 text(4.4,-0.05,'\tau = 5.02')
36 text(4,0.75,'\leftarrow\kappa\lambda\iota\sigma\mu\eta = 1/\tau')
37 grid
script Ln 37 Col 7 OVR

```

### 5.3.3 Απόκριση Συστήματος Πρώτης Τάξης σε Ημιτονοειδή Μεταβολή

Η ημιτονοειδής συνάρτηση εισόδου ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$U(t) = a \sin(\omega t) \quad (5.50)$$

Σύμφωνα με τον Πίνακα Α.1, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης (5.50) είναι:

$$U(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5.51)$$

όπου  $a$  είναι το εύρος του ημιτονοειδούς σήματος,  $\omega$  ( $=2\pi f$ , radians/χρόνος) είναι η γωνιακή συχνότητα και  $f$  (κύκλοι/χρόνος) είναι η κυκλική συχνότητα του ημιτονοειδούς σήματος.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.51) στην εξίσωση (5.6) λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)} \frac{\alpha \omega}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{K_p \alpha}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{\tau \omega}{s + 1/\tau} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\tau \omega s}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (5.52)$$

Ακολουθώντας, από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (5.52) (βλέπε Πίνακα Α.1), υπολογίζουμε τη χρονική απόκριση  $Y(t)$ :

$$Y(t) = \frac{K_p \alpha}{1 + \tau^2 \omega^2} (\tau \omega e^{-t/\tau} + \sin \omega t - \tau \omega \cos \omega t) \quad (5.53)$$

Παρατηρούμε ότι η απόκριση μιας διεργασίας πρώτης τάξης σε ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου είναι επίσης ημιτονοειδής. Για πολύ μεγάλους χρόνους (δηλαδή,  $t \gg \tau$ ), ο όρος  $\tau \omega e^{-t/\tau}$  μηδενίζεται και, συνεπώς, η χρονική απόκριση της διεργασίας στη μόνιμη κατάσταση γράφεται:

$$Y_s(t) = \frac{K_p \alpha}{1 + \tau^2 \omega^2} (\sin \omega t - \tau \omega \cos \omega t) \quad (5.54)$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας,

$$p \cos \omega + q \sin \omega = r \sin(\omega + \varphi) \quad (5.55)$$

όπου  $r = (p^2 + q^2)^{1/2}$  και  $\varphi = \tan^{-1}(p/q)$ , η εξίσωση (5.54) γράφεται:

$$Y_s(t) = \frac{K_p \alpha}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}(-\tau \omega) \quad (5.56)$$

όπου  $\varphi$  είναι η γωνία καθυστέρησης. Οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων εισόδου  $U(t)$ , και εξόδου  $Y_s(t)$ , σχεδιάζονται στην Εικόνα 5.11.

Γενικά, η μόνιμη απόκριση  $Y_s(t)$  μιας διεργασίας σε ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου θα δίνεται από το γινόμενο του μέτρου της μιγαδικής συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας,  $G(i\omega)$ , και του ημιτονοειδούς σήματος εισόδου, μετατοπισμένο κατά μια γωνία  $\varphi$ , που υπολογίζεται από το όρισμα της  $G(i\omega)$ . Η μιγαδική συνάρτηση  $G(i\omega)$  προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας  $G(s)$  μετά από την αντικατάσταση της μεταβλητής Laplace  $s$  με  $i\omega$ , όπου  $i = \sqrt{-1}$  είναι ο φανταστικός αριθμός και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα. Έτσι, για ένα δυναμικό σύστημα πρώτης τάξης, η μιγαδική συνάρτηση  $G(i\omega)$  θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$G(i\omega) = G(s)\Big|_{s=i\omega} = \frac{K_p}{\tau s + 1}\Big|_{s=i\omega} = \frac{K_p}{\tau i\omega + 1} \quad (5.57)$$

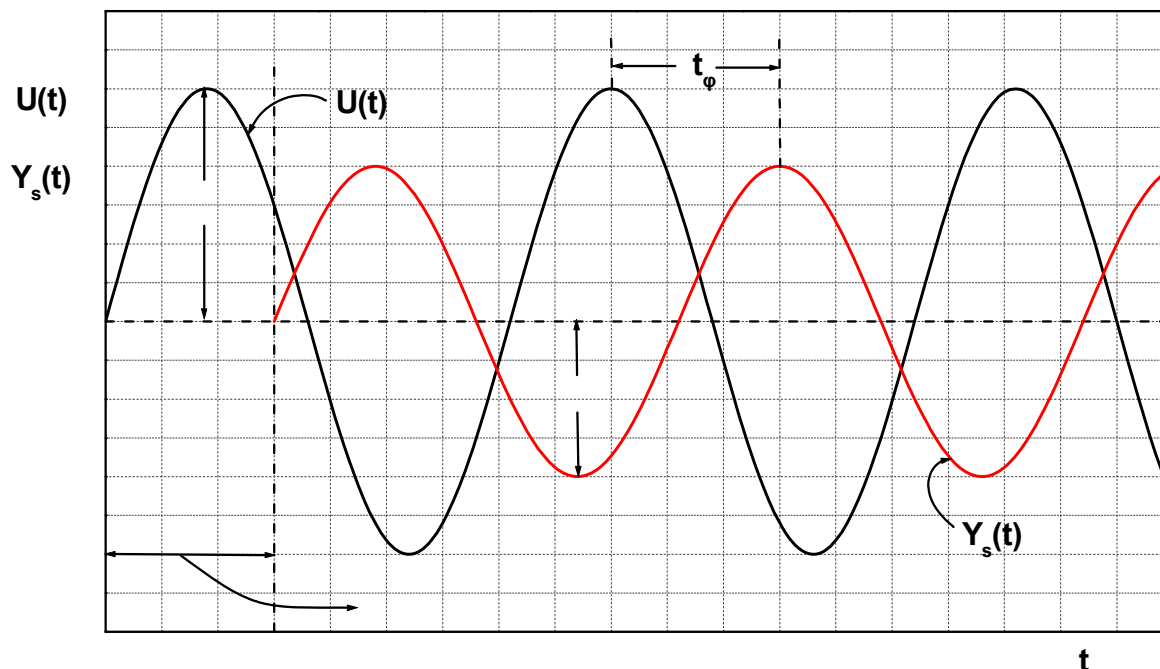
Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (5.57) με τη συζυγή παράσταση  $(1 - \tau i\omega)$ , λαμβάνουμε:

$$G(i\omega) = \frac{K_p(1 - \tau i\omega)}{(1 + \tau i\omega)(1 - \tau i\omega)} = K_p \frac{1 - \tau i\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad (5.58)$$

Ακολούθως, από την εξίσωση (5.58), υπολογίζουμε το **μέτρο**  $|G(i\omega)|$  και το **όρισμα**,  $\varphi$ , της  $G(i\omega)$ .

$$|G(i\omega)| = \sqrt{(\text{Re}G(i\omega))^2 + (\text{Im}G(i\omega))^2} = K_p \left( \frac{1 + \tau^2 \omega^2}{(1 + \tau^2 \omega^2)^2} \right)^{1/2} = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \quad (5.59)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}G(i\omega)}{\text{Re}G(i\omega)} \right) = \tan^{-1}(-\omega\tau) \quad (5.60)$$



Εικόνα 5.11: Απόκριση διεργασίας πρώτης τάξης σε ημιτονοειδή μεταβολή του  $U(t)$ .

Από την Εικόνα 5.11 και την εξίσωση (5.56) προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Η μόνιμη απόκριση της διεργασίας σε μια ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου ( $U(t) = a \sin \omega t$ ) είναι επίσης ημιτονοειδής και έχει γωνιακή συχνότητα ίση με εκείνη του σήματος εισόδου.
2. Ο λόγος του εύρους του ημιτονοειδούς σήματος εξόδου,  $\alpha'$ , ως προς το εύρος του ημιτονοειδούς σήματος εισόδου,  $\alpha$ , ισούται με το μέτρο της μιγαδικής συνάρτησης μεταφοράς  $G(i\omega)$ :

$$\text{Λόγος των ευρών} = (\text{Λ.Ε}) = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{K_p \alpha / \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\alpha} = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = |G(i\omega)|$$

3. Η απόκριση  $Y_s(t)$  έπεται (καθυστερεί) του σήματος εισόδου,  $U(t)$  κατά γωνία  $\varphi$ ,

$$\varphi = -2\pi(t_\varphi / T) = -\tan^{-1}(\omega\tau) = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

όπου  $T$  είναι η χρονική περίοδος του ημιτονοειδούς σήματος και  $t_\varphi$  η χρονική καθυστέρηση του σήματος εξόδου από το σήμα εισόδου. Παρατηρούμε ότι η γωνία καθυστέρησης  $\varphi$  είναι ίση με το όρισμα της μιγαδικής συνάρτησης  $G(i\omega)$ .

Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων (5.59) και (5.60) συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  συνθέτουν το γνωστό διάγραμμα του BODE. Συγκεκριμένα, το πλήρες διάγραμμα BODE μιας διεργασίας αποτελείται από μία λογαριθμική-λογαριθμική γραφική παράσταση του λόγου  $(\text{Λ.Ε}/K_p)$  ή  $(|G(i\omega)|/K_p)$  ως προς τη γωνιακή συχνότητα  $\omega$  (ή  $\omega\tau$ ) και μία ημιλογαριθμική γραφική παράσταση της γωνίας καθυστέρησης  $\varphi$  συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας  $\omega$  (ή  $\omega\tau$ ). Συχνά, αντί για τις λεπτομερείς γραφικές παραστάσεις των  $(\text{Λ.Ε}/K_p)$  και  $\varphi$  συναρτήσει του  $\omega$ , σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές μεταβολές τους ως προς  $\omega$ . Για το σκοπό αυτό, παίρνουμε λογαρίθμους στην εξίσωση (5.59):

$$\log\left(\frac{\text{Λ.Ε}}{K_p}\right) = -\frac{1}{2} \log(1 + \tau^2 \omega^2) \quad (5.61)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (5.61) έχει δύο ασύμπτωτες. Η πρώτη ασύμπτωτος έχει κλίση ίση με το μηδέν και υπολογίζεται από την εξίσωση (5.61) για μικρές τιμές του  $\omega\tau$ ,  $\omega\tau \rightarrow 0$ . Η δεύτερη ασύμπτωτος έχει κλίση ίση με μείον ένα και υπολογίζεται για μεγάλες τιμές του  $\omega\tau$ ,  $\omega\tau \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{\omega\tau \rightarrow 0} \log\left(\frac{\Lambda.E}{K_p}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{\omega\tau \rightarrow \infty} \log\left(\frac{\Lambda.E}{K_p}\right) = -\log(\tau\omega) \quad (5.62)$$

Οι δύο ασύμπτωτες τέμνονται στη γωνιακή συχνότητα  $\omega_c = 1/\tau$ , που ονομάζεται συχνότητα γωνίας.

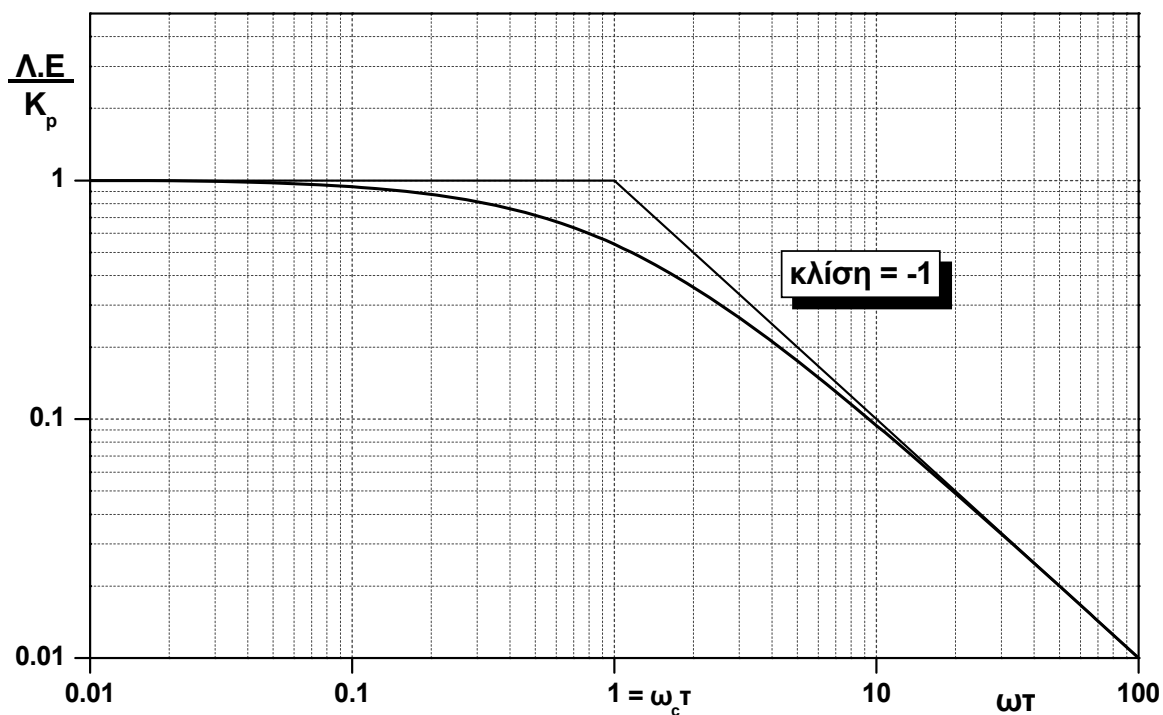
Παρόμοια, από την ασυμπτωτική ανάλυση της εξίσωσης (5.60) υπολογίζουμε τις ακόλουθες ασυμπτωτικές τιμές για τη γωνία καθυστέρησης  $\varphi$ :

$$\lim_{\omega\tau \rightarrow 0} \varphi = 0^\circ \quad ; \quad \lim_{\omega\tau \rightarrow \infty} \varphi = -90^\circ \quad ; \quad \text{για } \omega = \omega_c, \quad \varphi = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ \quad (5.63)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των  $(\Lambda.E/K_p)$  και  $\varphi$ , καθώς και οι αντίστοιχες ασυμπτωτικές τους τιμές σχεδιάζονται στις Εικόνες 5.12 και 5.13, αντίστοιχα.

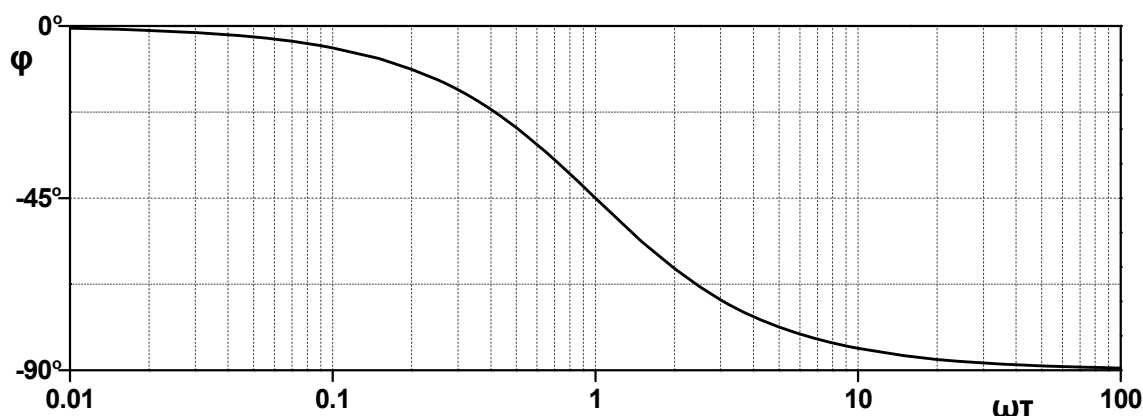
Εάν η γωνία καθυστέρησης είναι μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή των  $90^\circ$ , τότε είναι προφανές ότι η συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας δε θα ικανοποιεί την εξίσωση (5.57).

Η επαλήθευση του αποτελέσματος της εξίσωσης (5.56) και η γραφική παράσταση των εξισώσεων (5.53), (5.59) και (5.60) μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των ακόλουθων προγραμμάτων σε MATLAB.



**Εικόνα 5.12:** Γραφική παράσταση του  $(\Lambda.E/K_p)$  συναρτήσεως του  $\omega\tau$ .





Εικόνα 5.13: Γραφική παράσταση της γωνίας καθυστέρησης,  $\varphi$ , συναρτήσει του  $\omega T$ .

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter5\Section5_3_3.m
File Edit Text Desktop Window Help
[Icons] [Grid] [Zoom] [Print] [Find]

1 % Ενότητα 5.3.3: Απόκριση Συστήματος 1ης Τάξης σε Ημιτονοειδή
2 %           Μεταβολή
3
4 Kp = 17;      % καθορισμός της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας
5 T = 2;       % καθορισμός της χρονικής σταθεράς της διεργασίας
6
7 sys = tf([Kp],[T 1]); % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς
8 a = 1;       % εύρος της ημιτονοειδούς μεταβολής
9 w = 2;      % γωνιακή συχνότητα σήματος εισόδου (rad/sec)
10 t = [0 : 0.01 : 12*pi/w]'; % ορισμός χρόνου προσομοίωσης (εώς 6t)
11 u = a*sin(t*w); % υπολογισμός του σήματος εισόδου
12 [y,t] = lsim(sys,u,t); % υπολογισμός της χρονικής απόκρισης
13
14 figure(1) % γραφική παράσταση της μεταβλητής εξόδου
15 plot(t,y,'k-',t,u,'k:') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
16 grid on % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
17 xlabel('X\rho\o\varsigma, sec') % εισαγωγή τίτλου άξονα x
18 ylabel('Y(t)') % εισαγωγή τίτλου άξονα y
19 title(['A\pi\o\kappa\rho\i\sigma\eta \sigma\epsilon\psi\i\l\l\o\mu\epsilon...
20       '\i\o\tau\o\epsilon\psi\i\l\l\o\mu\epsilon \i\o\delta\epsilon\tau\o\epsilon\psi\i\l\l\o\mu\epsilon...
21       '\alpha\beta\lambda\epsilon\eta']) % εισαγωγή τίτλου γραφήματος
22 pos = 0; % θέση υπομνήματος
23 legend('Y(t)', 'U(t)', pos) % δημιουργία υπομνήματος

```

Ln 23 Col 65 OVR

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter5\Section5_3_3_BODE.m
File Edit Text Desktop Window Help
[Icons] [Grid] [Zoom] [Close]

1  % Δημιουργία Διαγραμμάτων BODE για Σύστημα 1ης τάξης
2
3  Kp = 17 ; % καθορισμός της σταθεράς ενίσχυσης
4  T = 2 ; % καθορισμός της χρονικής σταθεράς
5  sys = tf([Kp],[T 1]) ; % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς
6
7  % δημιουργία λογαριθμικού διαστήματος για τα διαγράμματα BODE
8  w = logspace(log10(10^(-2)/T),log10(10^2/T)) ;
9  % υπολογισμός συχνωτικής απόκρισης και αποθήκευση του λ.ε.
10 % στη θέση 'mag' και της φάσης στην 'phase' ( ο )
11 [mag,phase] = bode(sys,w) ;
12 AR = zeros(1,length(mag)) ;
13 for j = 1:1:length(mag)
14     AR(1,j) = mag(:,j) ; % εξαγωγή του λ.ε. στη μεταβλητή AR
15 end
16 figure(1) % δημιουργία 1ου διαγράμματος BODE
17 loglog(w*T,AR/Kp,'k-') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
18 ylim([0.01 10]) % καθορισμός ορίων του άξονα y
19 grid on % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
20 xlabel('\omega\tau') % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
21 ylabel('\Lambda.E. / K_p') % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
22 % εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
23 title(['\Lambdao\gammaao\varsigma E\upsilon\rho\upsilon'...
24     '\varsigma \Lambda.E./K_p \sigma\upsilon\epsilon\eta\alpha\rho'...
25     '\tau\eta\sigma\epsilon\iota\tau\upsilon\omega\tau'])
26
27 phi = zeros(1,length(phase)) ;
28 for i = 1:1:length(phase)
29     phi(1,i) = phase(:,i) ; % εξαγωγή του φ στη μεταβλητή phi
30 end
31 figure(2) % δημιουργία 2ου διαγράμματος BODE
32 semilogx(w*T,phi,'k-') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
33 grid on % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
34 xlabel('\omega\tau') % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
35 ylabel('\phi (^o)') % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
36 % εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
37 title(['\Gamma\omega\eta\alpha K\alpha\theta\eta\upsilon'...
38     '\sigma\tau\epsilon\eta\varsigma \phi '...
39     '\sigma\upsilon\epsilon\eta\tau\eta\sigma\epsilon'...
40     '\eta\tau\upsilon\omega\tau'])

```

script Lh 40 Col 40 OVR

**Παράδειγμα 5.3: Προσδιορισμός του δυναμικού μοντέλου διεργασίας πρώτης τάξης από πειραματικές μετρήσεις της συχνοτικής απόκρισης**

Δίνονται οι ακόλουθες πειραματικές τιμές της συχνοτικής απόκρισης ενός δυναμικού συστήματος συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας  $\omega$ .

Γωνιακή Συχνότητα $\omega$ (rad/min)	Λόγος των Ευρών $\Lambda.E =  G(i\omega) $	Γωνία Καθυστέρησης $\varphi$
0,1	5,00	-11,30°
0,2	4,80	-21,80°
0,4	3,80	-38,65°
0,8	2,60	-57,99°
1,0	2,30	-63,43°
2,0	1,25	-75,96°
4,0	0,63	-82,87°
6,0	0,40	-85,23°

Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του δυναμικού συστήματος (δηλαδή τη σταθερά ενίσχυσης  $K_p$  και τη χρονική σταθερά  $\tau$ ) με τη βοήθεια δύο τουλάχιστον μεθόδων επίλυσης.

*Λύση:*

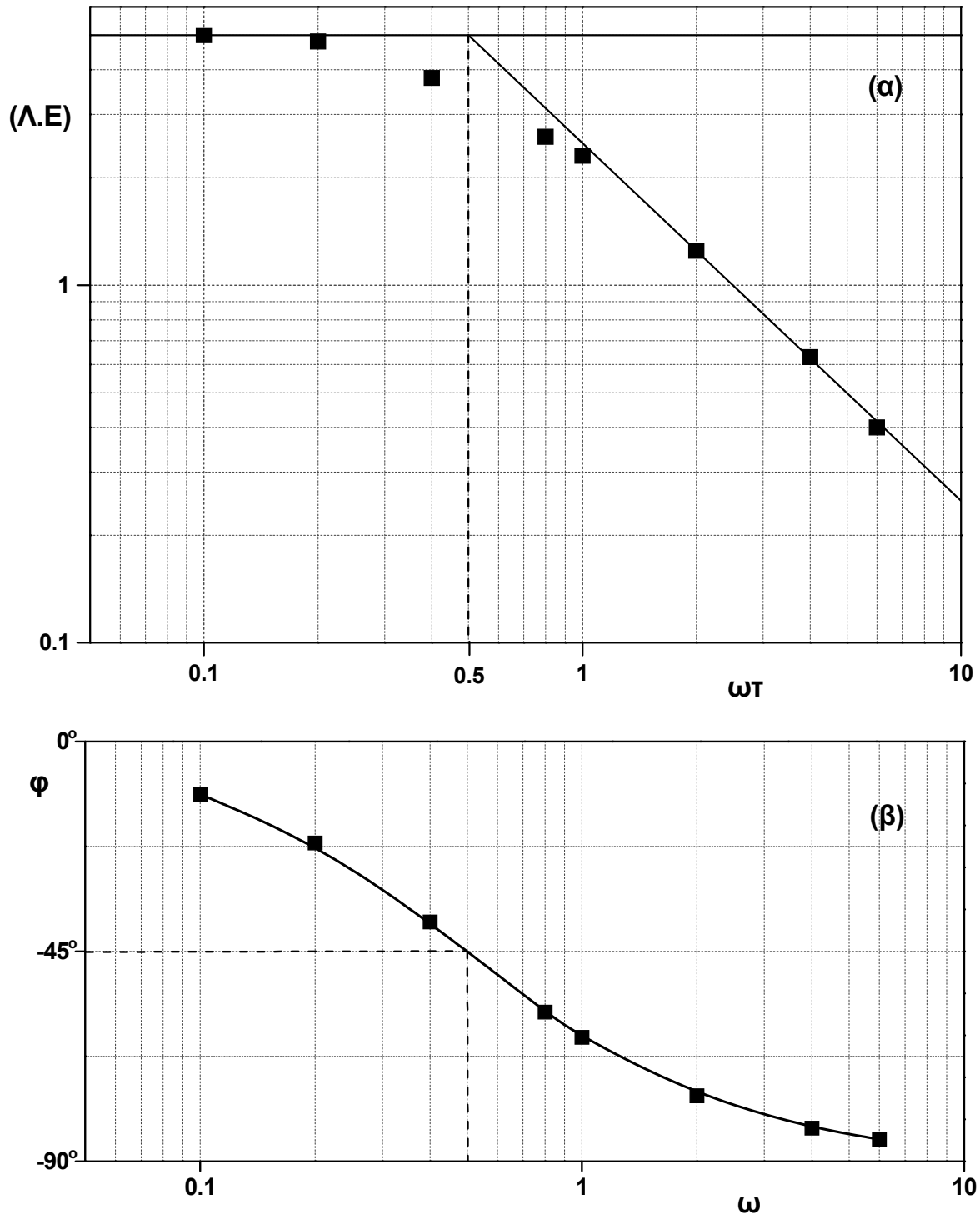
Αρχικά, με βάση τα πειραματικά δεδομένα της συχνοτικής απόκρισης (βλέπε Εικόνα 5.14) κατασκευάζουμε το πλήρες διάγραμμα BODE.

Παρατηρούμε ότι οι δύο ασύμπτωτες στο διάγραμμα 5.14(α) τέμνονται στη γωνιακή συχνότητα  $\omega_c = 0,5$  rad/min. Συνεπώς, η χαρακτηριστική χρονική σταθερά της διεργασίας θα είναι ίση με  $\tau = 1/\omega_c = 1/0,5 = 2$  min. Επίσης, από το διάγραμμα 5.14(β), προκύπτει ότι η συχνοτική απόκριση του δυναμικού συστήματος, στη γωνιακή συχνότητα  $\omega_c = 0,5$ , παρουσιάζει γωνία καθυστέρησης  $\varphi = -45^\circ$ . Συνεπώς, η χρονική σταθερά της διεργασίας είναι ίση με  $\tau = 1/0,5 = 2$  min.

Ακολούθως, από την εξίσωση (5.59) για  $\omega_c = 0,5$  και  $\Lambda.E = 3,535$  υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς ενίσχυσης του δυναμικού συστήματος,  $K_p = 5$ . Είναι φανερό ότι η τιμή του  $K_p = 5$  αντιστοιχεί στην πρώτη ασύμπτωτο (δηλαδή  $\Lambda.E=K_p$ ) στο διάγραμμα BODE 5.14(α). Εναλλακτικά, οι τιμές των  $\tau$  και  $K_p$  μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από την

αναλυτική επίλυση των εξισώσεων (5.59) και (5.60) για διάφορες τιμές της γωνιακής συχνότητας,  $\omega$ . Δηλαδή,

$$K_p = (\Lambda.E)(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2} \quad ; \quad \tau = \tan(\varphi)/(-\omega)$$



Εικόνα 5.14: Διαγράμματα BODE του άγνωστου δυναμικού συστήματος.

## Τι πρέπει να γνωρίζω

- ✘ Να διατυπώσετε στο πεδίο του χρόνου,  $t$ , και στο πεδίο της μεταβλητής,  $s$ , το μαθηματικό μοντέλο ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης.
- ✘ Ποιά είναι η φυσική σημασία της χαρακτηριστικής χρονικής σταθεράς,  $\tau$ , και της σταθεράς ενίσχυσης,  $K_p$ ;
- ✘ Με τη βοήθεια της εξίσωσης (4.68) να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης (βλέπε εξίσωση (5.1)): i) σε μια μοναδιαία παλμική μεταβολή του σήματος εισόδου,  $u(t) = u_s + 1\delta(t)$ , ii) σε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου,  $u(t) = u_s + 1H(t)$  και iii) σε μια ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου,  $u(t) = u_s + \sin(\omega t)$ . Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων με τις αντίστοιχες εξισώσεις (5.33), (5.40) και (5.53) για  $\alpha = 1$ .
- ✘ Να διατυπώσετε τις σχέσεις που συνδέουν τη βηματική απόκριση με την παλμική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης.
- ✘ Σε πόσο χρόνο περίπου ένα ευσταθές δυναμικό σύστημα πρώτης τάξης επανέρχεται στη μόνιμη κατάσταση μετά την εισαγωγή μιας παλμικής ή βηματικής αλλαγής της μεταβλητής εισόδου;
- ✘ Να υπολογίσετε την κλίση της χρονικής απόκλισης της  $Y(t)$  σε χρόνο  $t = 0$ , δηλαδή την  $(dY(t)/dt)|_{t=0}$ , για τις περιπτώσεις παλμικής και βηματικής απόκρισης.
- ✘ Πώς υπολογίζεται πειραματικά η σταθερά ενίσχυσης ενός ευσταθούς δυναμικού συστήματος;
- ✘ Να αποδείξετε δύο τουλάχιστον τρόπους υπολογισμού της σταθεράς ενίσχυσης,  $K_p$ , και της χρονικής σταθεράς,  $\tau$ , ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης από πειραματικά δεδομένα της χρονικής απόκρισης του συστήματος σε παλμική ή βηματική μεταβολή της μεταβλητής εισόδου.
- ✘ Να υπολογίσετε τη μόνιμη απόκριση,  $Y_s(t)$ , ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης σε μια ημιτονοειδή μεταβολή της μεταβλητής εισόδου,  $U(t) = a \sin(\omega t)$ .
- ✘ Να κατασκευάσετε το πλήρες διάγραμμα BODE ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης.

**Ασκήσεις:**

**Άσκηση 5.1:** Θεωρούμε ότι η κυλινδρική δεξαμενή της Εικόνας 3.3 έχει χωρητικότητα  $V=300$  L. Η μεταβολή του ύψους του ρευστού στη δεξαμενή,  $h(t)$ , περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση (5.13). Η διατομή της δεξαμενής είναι ίση με  $A = 0,25$  m<sup>2</sup> και η σταθερά αντίστασης στην εκροή του ρευστού είναι ίση με  $R = 10$  min/m<sup>2</sup>. Αρχικά, η ογκομετρική παροχή στη δεξαμενή είναι ίση με  $q_o(t) = 0,05$  m<sup>3</sup>/min .

- α) Να υπολογίσετε το ύψος του ρευστού στη δεξαμενή στην αρχική μόνιμη κατάσταση του συστήματος.
- β) Να υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή του ύψους του ρευστού στη δεξαμενή για μία βηματική μεταβολή της ογκομετρικής παροχής στη δεξαμενή από  $0,05$  m<sup>3</sup>/min σε  $0,1$  m<sup>3</sup>/min, (για  $t \geq 0$ ).
- γ) Να προσδιορίσετε το χρόνο στον οποίο το ύψος του ρευστού στη δεξαμενή θα είναι ίσο με  $0,8$  m. Ποια θα είναι η τελική τιμή του ύψους του ρευστού στη δεξαμενή;
- δ) Υποθέτουμε ότι η ογκομετρική παροχή στη δεξαμενή αλλάζει ξαφνικά από  $0,05$  m<sup>3</sup>/min σε  $0,15$  m<sup>3</sup>/min. Υπολογίστε το χρόνο στον οποίο η δεξαμενή θα υπερχειλίσει.

**Άσκηση 5.2:** Θεωρούμε την κυλινδρική δεξαμενή της Άσκησης 5.1. Να υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή του ύψους του ρευστού στη δεξαμενή εάν η ογκομετρική παροχή μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο:

$$q_o(t) = 0,10H(t) - 0,05H(t-5), \quad (\text{m}^3/\text{min})$$

Ακολουθώς, να κάνετε τη γραφική παράσταση του  $h(t)$  ως προς  $t$ . Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ύψους του ρευστού στη δεξαμενή;

**Άσκηση 5.3:** Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση διεργασίας πρώτης τάξης σε μια επικλινή μεταβολή του σήματος εισόδου:

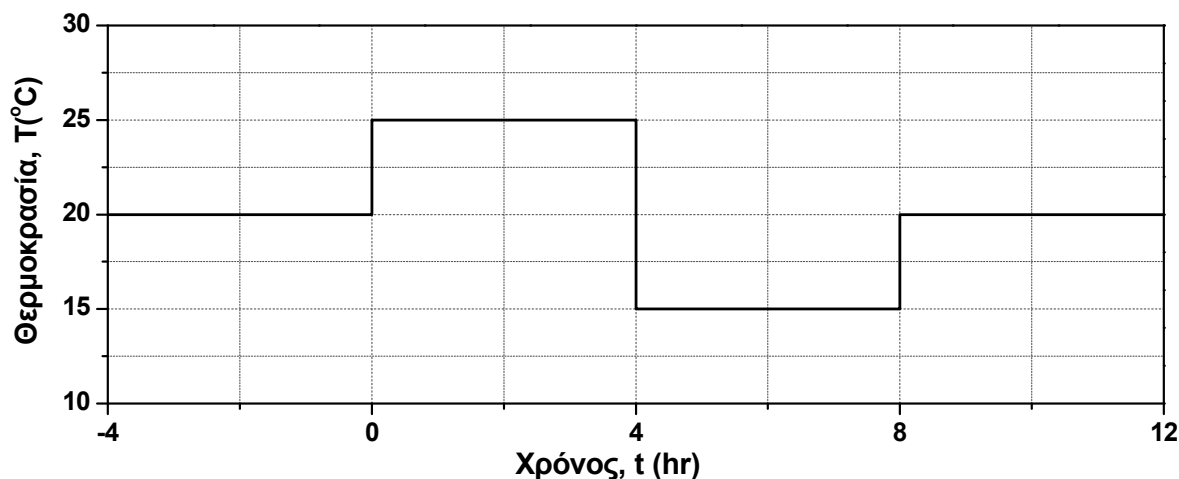
$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ at, & t \geq 0 \end{cases}$$

**Άσκηση 5.4:** Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση διεργασίας πρώτης τάξης στην ακόλουθη τετραγωνική παλμική μεταβολή του σήματος εισόδου:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha, & 0 \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

**Άσκηση 5.5:** Δίνεται ένα δοχείο συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης χωρητικότητας 2.000 kg. Το δοχείο διαθέτει ηλεκτρική αντίσταση, η οποία θερμαίνει το νερό στο δοχείο. Αρχικά, το δοχείο τροφοδοτείται με μια σταθερή παροχή νερού ίση με 500 kg/hr σε θερμοκρασία 20°C. Στη μόνιμη κατάσταση, η θερμοκρασία του ρεύματος εξόδου είναι ίση με 60°C.

α) Θεωρούμε ότι η παροχή του νερού στο δοχείο παραμένει σταθερή (500 kg/hr) και η θερμοκρασία του ρεύματος τροφοδοσίας μεταβάλλεται όπως στην παρακάτω Εικόνα 5.15. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της θερμοκρασίας στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός μεταφοράς της θερμότητας από την ηλεκτρική αντίσταση στο νερό του δοχείου παραμένει σταθερός.

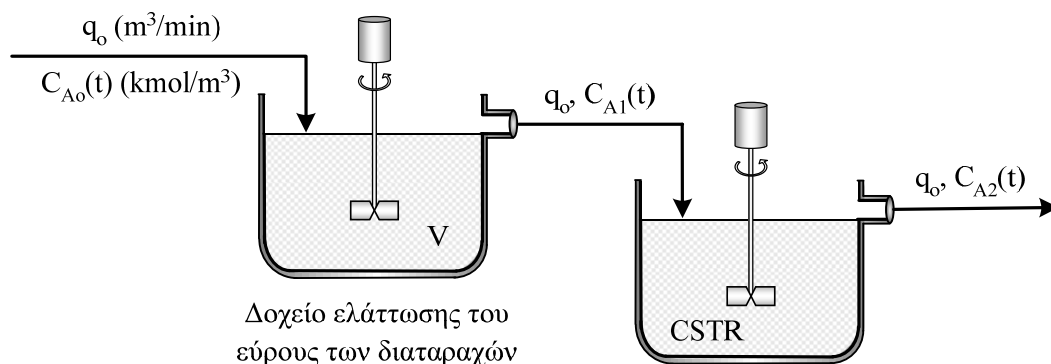


**Εικόνα 5.15:** Μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού στην τροφοδοσία.

β) Θεωρούμε ότι η παροχή του νερού στο δοχείο παραμένει σταθερή (500 kg/hr) σε θερμοκρασία 20°C και ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας από την ηλεκτρική αντίσταση στο νερό μειώνεται σύμφωνα με το νόμο  $(\dot{q}(t) - \dot{q}_s) = -4000(1 - e^{-2t})$ . Να υπολογίσετε τη μεταβολή της θερμοκρασίας του ρευστού στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου.

**Άσκηση 5.6:** Με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside (βλέπε Παράρτημα Α), να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση μιας διεργασίας πρώτης τάξης σε μια ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου.

**Άσκηση 5.7:** Η συγκέντρωση του συστατικού Α στο ρεύμα τροφοδοσίας, σε έναν αντιδραστήρα συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης, ακολουθεί μια ημιτονοειδή μεταβολή με εύρος μεγαλύτερο από το αποδεκτό για την καλή λειτουργία του αντιδραστήρα. Για το λόγο αυτό τοποθετούμε πριν την είσοδο του αντιδραστήρα ένα δοχείο όγκου,  $V$ , (βλέπε Εικόνα 5.16) προκειμένου να ελαττώσουμε το εύρος μεταβολής της συγκέντρωσης του συστατικού Α στο ρεύμα τροφοδοσίας.



**Εικόνα 5.16:** Διάταξη ελάττωσης του εύρους μεταβολής της συγκέντρωσης του συστατικού Α στο ρεύμα τροφοδοσίας.

$q_0$  : είναι η σταθερή ογκομετρική παροχή του ρεύματος τροφοδοσίας ίση με 1 m<sup>3</sup>/min.

$C_{A0}(t)$  : είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη συγκέντρωση του Α στο ρεύμα τροφοδοσίας, σύμφωνα με τον ημιτονοειδή νόμο:  $C_{A0}(t) = C_{A0,s}(t) + a_0 \sin(\omega t)$ .

- Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, να υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή της συγκέντρωσης του Α,  $C_{A1}(t)$ , στην έξοδο του πρώτου δοχείου.
- Να υπολογίσετε το μέγεθος του πρώτου δοχείου,  $V$ , έτσι ώστε το εύρος της ημιτονοειδούς μεταβολής της συγκέντρωσης στο ρεύμα εξόδου,  $a_1$ , να είναι 5 τουλάχιστον φορές μικρότερο από το εύρος της ημιτονοειδούς μεταβολής στην είσοδο,  $a_0$ .



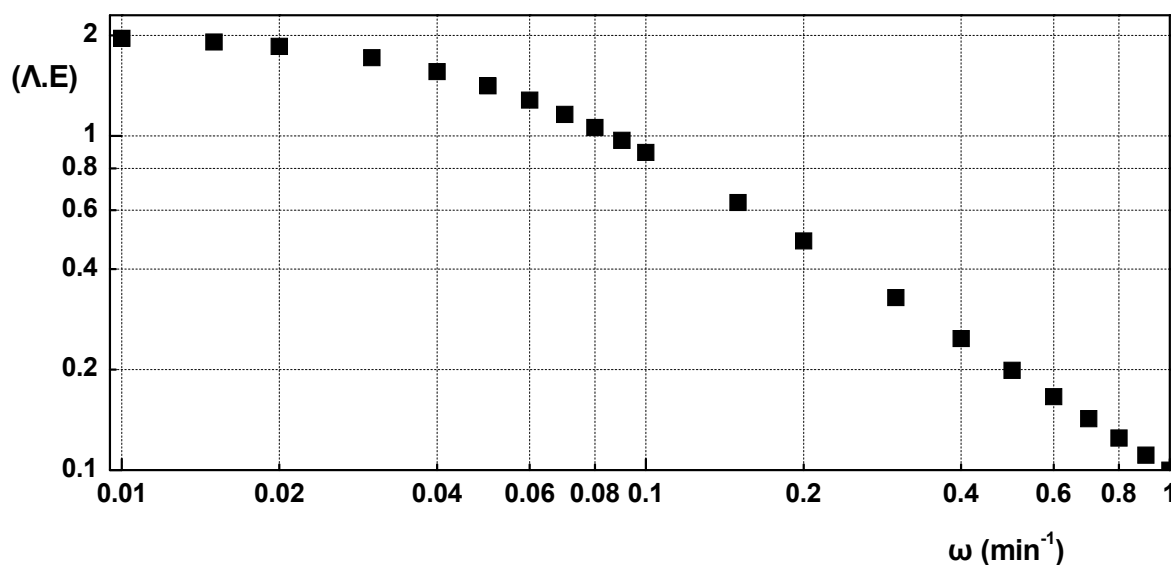
γ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα BODE (λόγος ευρών συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας και γωνία καθυστέρησης συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας) για την παραπάνω διεργασία. Να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές απεικονίσεις.

**Άσκηση 5.8:** Ένας μεταλλουργικός φούρνος υπόκειται σε μια θετική βηματική μεταβολή στην παροχή του αέριου καυσίμου ίση με 10% από την τιμή της παροχής στη μόνιμη κατάσταση.

α) Να υπολογίσετε την τάξη και τις χαρακτηριστικές παραμέτρους του δυναμικού μοντέλου της διεργασίας (ενίσχυση, χρονική σταθερά) με βάση τις ακόλουθες μετρήσεις.

<i>Χρόνος, <math>t</math> (min)</i>	0	20	40	60	200
<i>Θερμοκρασία, <math>T</math> (°C)</i>	471	563	629	666	721

β) Να υπολογίσετε την τάξη και τις χαρακτηριστικές παραμέτρους του δυναμικού μοντέλου από τις ακόλουθες πειραματικές μετρήσεις της συχνοτικής απόκρισης της διεργασίας.



**Άσκηση 5.9:** (Θέμα εξετάσεων – Ιούνιος 2004) Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ενός δυναμικού συστήματος πρώτης τάξης με νεκρό χρόνο:

$$G_p(s) = \frac{5e^{-2s}}{5s+1}$$

- α) Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση του δυναμικού συστήματος σε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση της  $Y(t)$  ως προς  $t$ .
- β) Να υπολογίσετε τη συχνотική απόκριση στη μόνιμη κατάσταση και να κάνετε το διάγραμμα BODE (λόγος των ευρών και γωνία καθυστέρησης ως προς τη γωνιακή συχνότητα,  $\omega$ ).

Σημείωση:

Εάν  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ , τότε  $|G| = |G_1||G_2|$  και  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$$G_1(s)|_{i\omega} = G_1(i\omega) = e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)$$

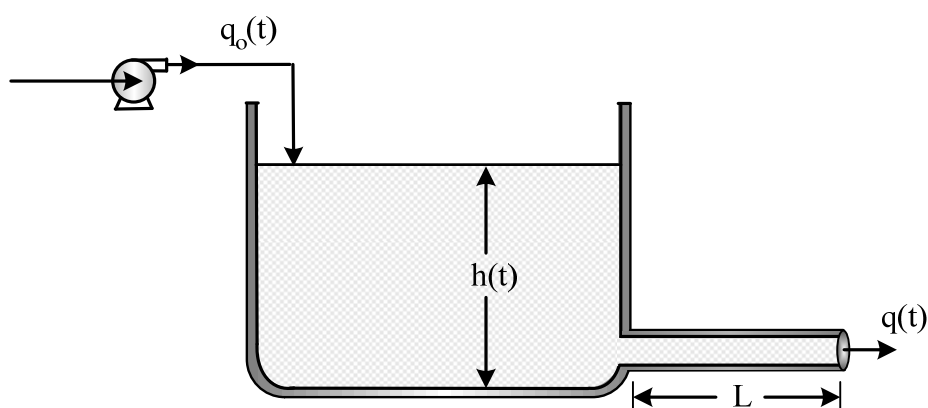
- γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς (σταθερά ενίσχυσης, χρονική(-ές) σταθερά(-ές), κλπ.) μιας άγνωστης διεργασίας από τις ακόλουθες πειραματικές μετρήσεις της συχνотικής απόκρισης.

$\omega$ ( $sec^{-1}$ )	Λόγος Ευρών	Γωνία Καθυστέρησης
0,1	5	-12°
0,2	4,8	-25°
0,4	3,8	-45°
0,8	2,6	-73°
1,0	2,3	-83°
2,0	1,25	-122°
4,0	0,63	-173°
6,0	0,40	-218°

**Άσκηση 5.10:** (Θέμα εξετάσεων - Σεπτέμβριος 2004) Δίνεται η κυλινδρική δεξαμενή της παρακάτω εικόνας. Λόγω των διαταραχών που προκαλούνται από την περιοδική λειτουργία του εμβόλου της αντλίας, η παροχή στη δεξαμενή μεταβάλλεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:  $q_o(t) = q_{os} + a \sin(\omega t)$ .

$q_{os}$  είναι η παροχή στη δεξαμενή στη μόνιμη κατάσταση και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα του ημιτονοειδούς σήματος. Για απλοποίηση, θεωρούμε ότι η ροή στον αγωγό εξόδου είναι γραμμική, δηλαδή ακολουθεί το Νόμο του Poiseuille:

$$q(t) = \pi R^4 \Delta P(t) / (8\mu L)$$



όπου  $R$ ,  $L$  και  $\mu$  είναι αντίστοιχα η ακτίνα, το μήκος του κυλινδρικού αγωγού και το ιξώδες του ρευστού. Η πτώση πίεσης στον αγωγό θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta P(t) = \rho g h(t)$$

όπου  $\rho$  είναι η σταθερή πυκνότητα του ρευστού.

- α) Να ταξινομήσετε τις διάφορες μεταβλητές του συστήματος σε μεταβλητές εισόδου, εξόδου και κατάστασης και να προσδιορίσετε τους βαθμούς ελευθερίας του δυναμικού συστήματος.
- β) Να αναγράψετε το δυναμικό ισοζύγιο μάζας για το σύστημα και να προσδιορίσετε τη χρονική σταθερά,  $\tau$ , και τη σταθερά ενίσχυσης,  $K_p$ , συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος. (Για να υπολογίσετε τις τιμές των  $\tau$  και  $K_p$  του δυναμικού συστήματος είναι απαραίτητο να εισάγετε τις μεταβλητές απόκλισης ( $H(t) = (h(t) - h_s)$ ) και  $Q_o(t) = (q_o(t) - q_{os})$ ).
- γ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της κυλινδρικής δεξαμενής (δηλαδή την τιμή της χρονικής σταθεράς,  $\tau$ ) συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας,  $\omega$ , έτσι ώστε το εύρος της ημιτονοειδούς μεταβολής στο ρεύμα εξόδου,  $q(t)$ , να είναι ίσο με το 10% του αντίστοιχου εύρους του ημιτονοειδούς σήματος εισόδου.
- δ) Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των  $\tau$  και  $K_p$  με βάση τα ακόλουθα αριθμητικά δεδομένα:

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3 \quad , \quad \mu = 1 \text{ g/(cm} \cdot \text{sec)} \quad , \quad g = 9,8 \text{ m/sec}^2 \quad , \quad L = 50 \text{ cm} \quad , \quad R = 0,6 \text{ cm}$$

Εάν η γωνιακή συχνότητα της εισερχόμενης διαταραχής στην είσοδο της δεξαμενής είναι ίση με  $\omega = 0,5 \text{ sec}^{-1}$ , να υπολογίσετε τη διατομή  $A$  του κυλινδρικού δοχείου, έτσι

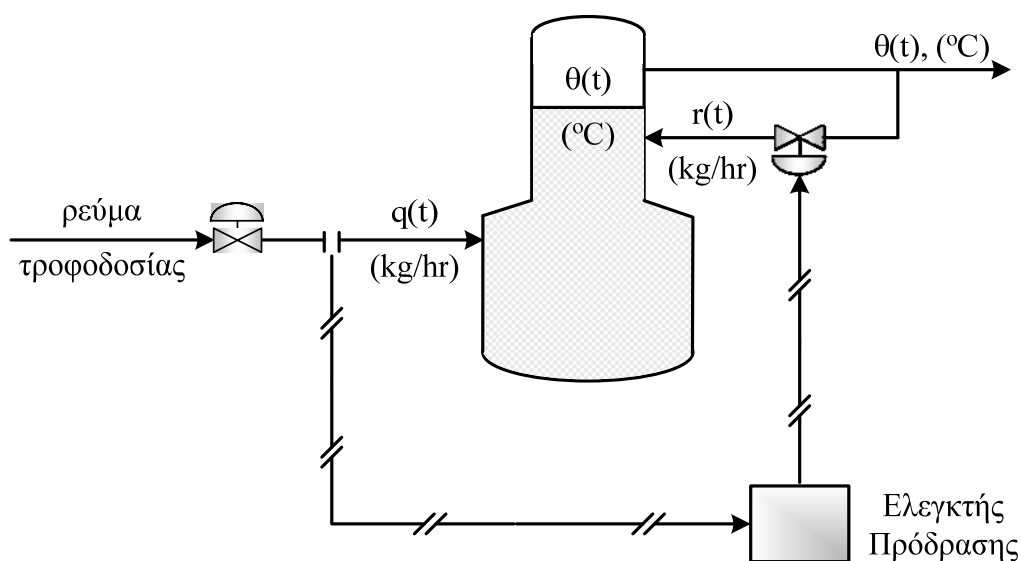
ώστε οι διαταραχές στο ρεύμα εξόδου να έχουν μέγεθος 10% του αντίστοιχου μεγέθους των διαταραχών του ρεύματος εισόδου.

- ε) Εάν  $q_{os} = 10 \text{ cm}^3/\text{sec}$ , να υπολογίσετε το ύψος του ρευστού στο δοχείο στη μόνιμη κατάσταση.
- ζ) Εάν το εύρος της ημιτονοειδούς μεταβολής στο ρεύμα εισόδου είναι:  $\alpha = 2 \text{ cm}^3/\text{sec}$ , να υπολογίσετε το ύψος του κυλινδρικού δοχείου έτσι ώστε η υπερχειλίση του δοχείου να είναι αδύνατη.
- η) Να κάνετε το λεπτομερές διάγραμμα BODE της παραπάνω διεργασίας (λόγος των ευρών και γωνία καθυστέρησης ως προς  $\omega$ ).

**Άσκηση 5.11:** (Θέμα εξετάσεων – Φεβρουάριος 2006) Η θερμοκρασία,  $\theta(t)$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) στο κρίσιμο πάτωμα μιας μονάδας κλασματικής πυρόλυσης (βλέπε Εικόνα 5.17), ρυθμίζεται με τη βοήθεια ενός ελεγκτή πρόδρασης. Ο ελεγκτής ρυθμίζει την παροχή του ρεύματος επαναρροής,  $r(t)$  (kg/hr), συναρτήσει της τιμής της μετρούμενης παροχής στην είσοδο της μονάδας κλασματικής πυρόλυσης,  $q(t)$  (kg/hr).

Από πειραματικές μετρήσεις ταυτοποιήθηκαν οι ακόλουθες συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ των μεταβλητών εισόδου ( $r(t)$  και  $q(t)$ ) και της μεταβλητής κατάστασης/ εξόδου,  $\theta(t)$ :

$$T(s) = \frac{10}{20s+1} Q(s) \quad , \quad T(s) = \frac{-5}{5s+1} R(s)$$



**Εικόνα 5.17:** Μονάδα κλασματική πυρόλυσης.

όπου  $T(t) = (\theta(t) - \theta_s)$ ,  $Q(t) = (q(t) - q_s)$  και  $R(t) = (r(t) - r_s)$  είναι οι μεταβλητές απόκλισης και  $\theta_s$ ,  $q_s$  και  $r_s$  είναι οι αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών στη μόνιμη κατάσταση.

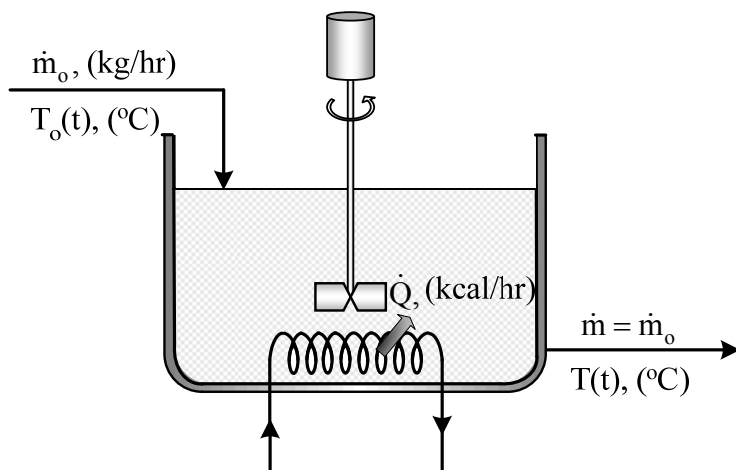
- α) Να κατατάξετε τις διάφορες μεταβλητές της διεργασίας σε μεταβλητές εισόδου (π.χ., ελέγχου, διαταραχών), εξόδου και κατάστασης.
- β) Να υπολογίσετε τους βαθμούς ελευθερίας της διεργασίας και να προσδιορίσετε τις μεταβλητές εκείνες, τις μεταβολές των οποίων θα πρέπει να γνωρίζετε, για να είναι δυνατή η μαθηματική επίλυση του μοντέλου.
- γ) Να γράψετε το μοντέλο της διεργασίας, υπό τη γενική μορφή:

$$Y(s) = G_p(s)U(s) + G_d(s)D(s)$$

όπου  $Y(s)$ ,  $U(s)$  και  $D(s)$  είναι, αντίστοιχα, οι μετασχηματισμένες μεταβλητές εξόδου/ κατάστασης, εισόδου/ ελέγχου, εισόδου/ διαταραχής.  $G_p(s)$  και  $G_d(s)$  είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ των μεταβλητών ( $Y(s)$  και  $U(s)$ ) και ( $Y(s)$  και  $D(s)$ ). Να προσδιορίσετε τις αριθμητικές τιμές και τις διαστάσεις των σταθερών ενίσχυσης και των χρονικών σταθερών των συναρτήσεων  $G_p(s)$  και  $G_d(s)$ .

- δ) Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση της θερμοκρασίας στο κρίσιμο πάτωμα της μονάδας,  $\theta(t)$ , σε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή του ρεύματος επαναροής,  $R(t) = 1H(t)$ . Δίνεται ότι η αρχική θερμοκρασία στο κρίσιμο πάτωμα είναι ίση με  $\theta(t=0) = \theta_s = 90^\circ\text{C}$ , η δε παροχή,  $q(t)$ , παραμένει σταθερή. Ποια είναι η τελική τιμή της  $\theta(t)$  στη νέα μόνιμη κατάσταση;
- ε) Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση της θερμοκρασίας,  $\theta(t)$ , σε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή του ρεύματος τροφοδοσίας,  $Q(t) = 1H(t)$ , θεωρώντας αυτή τη φορά ότι το ρεύμα επαναροής παραμένει σταθερό. Ποια είναι η τελική τιμή της  $T(t)$  στη νέα μόνιμη κατάσταση;
- στ) Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση της θερμοκρασίας,  $\theta(t)$ , σε ταυτόχρονη μεταβολή των  $R(t) = 2H(t)$  και  $Q(t) = 1H(t)$ . Ποια είναι η τιμή της  $\theta(t)$  στη νέα μόνιμη κατάσταση;

**Άσκηση 5.12:** (Θέμα εξετάσεων – Απρίλιος 2006) Δίνεται η ακόλουθη θερμική διεργασία. Θεωρούμε ότι το δοχείο συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης έχει σταθερή χωρητικότητα ( $M = V\rho = 1000 \text{ kg}$ ) και τροφοδοτείται με σταθερή παροχή νερού,



**Εικόνα 5.18:** Θέρμανση ρευστού σε δοχείο συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης

$\dot{m}_o = \dot{m} = 1000 \text{ kg/hr}$ , αρχικά σε θερμοκρασία  $T_o(t < 0) = 30^\circ\text{C}$ . Η ειδική θερμότητα του νερού είναι ίση με  $C_p = 1 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ .

- α) Να διατυπώσετε τα απαραίτητα δυναμικά ισοζύγια (ή ισοζύγιο) που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός της παρεχόμενης θερμότητας από την ηλεκτρική αντίσταση παραμένει αμετάβλητος ως προς το χρόνο.
- β) Να προσδιορίσετε τις μεταβλητές εισόδου, εξόδου και κατάστασης της παραπάνω διεργασίας. Επίσης να υπολογίσετε τους βαθμούς ελευθερίας. Είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος με βάση τα παραπάνω δεδομένα;
- γ) Εάν η θερμοκρασία του νερού στην έξοδο του δοχείου στην αρχική μόνιμη κατάσταση είναι ίση με  $80^\circ\text{C}$ , να υπολογίσετε το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας σε (kcal/hr) από την ηλεκτρική αντίσταση στο ρευστό του δοχείου.
- δ) Να προσδιορίσετε τη χαρακτηριστική χρονική σταθερά της διεργασίας. Ποια είναι η αριθμητική της τιμή και η σημασία της;
- ε) Εάν η θερμοκρασία του ρεύματος εισόδου σε χρόνο  $t = 0$  μεταβληθεί βηματικά από  $30^\circ\text{C}$  (για  $t < 0$ ), σε  $10^\circ\text{C}$  (για  $t \geq 0$ ) και το θερμικό φορτίο της ηλεκτρικής αντίστασης παραμένει αμετάβλητο, να υπολογίσετε: (i) τη χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας του ρευστού στην έξοδο του δοχείου και (ii) το χρόνο που απαιτείται για να φθάσει το σύστημα στη νέα μόνιμη κατάσταση.