

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Δυναμική Ανάλυση των Συστημάτων Δεύτερης Τάξης

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε τη δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές, μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Ένα δευτεροβάθμιο δυναμικό σύστημα μπορεί να αποτελείται είτε από δύο δυναμικά συστήματα πρώτης τάξης συνδεδεμένα στη σειρά ή να περιγράφεται από μία γενικευμένη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (2, 0).

Αρχικά, θα διατυπώσουμε το δυναμικό μοντέλο ενός γραμμικού συστήματος δεύτερης τάξης στο πεδίο του χρόνου και στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε την αντίστοιχη μορφή του στο πεδίο s του μετασχηματισμού Laplace. Ακολούθως, θα δώσουμε κάποια παραδείγματα φυσικών και χημικών διεργασιών δεύτερης τάξης και θα εισάγουμε την έννοια της αλληλεπίδρασης δύο δυναμικών συστημάτων πρώτης τάξης συνδεδεμένων στη σειρά. Τέλος, θα διερευνήσουμε με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, τη δυναμική απόκριση ενός συστήματος δεύτερης τάξης σε στιγμιαία παλμική, βηματική και ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου.

6.1 Γενική Περιγραφή ενός Δυναμικού Συστήματος Δεύτερης Τάξης

Η δυναμική συμπεριφορά ενός μεγάλου αριθμού φυσικών, χημικών και βιολογικών συστημάτων περιγράφεται, συχνά, από την ακόλουθη γραμμική, μη ομογενή διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$a_2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + a_1 \frac{dY}{dt} + a_0 Y(t) = b_0 U(t) \quad (6.1)$$

όπου,

$Y(t)$ ($= y(t) - y_s$): είναι η μεταβλητή απόκλισης του σήματος εξόδου

$U(t)$ ($= u(t)-u_s$): είναι η μεταβλητή απόκλιση του σήματος εισόδου

a_i : είναι πραγματικοί θετικοί συντελεστές στην εξίσωση (6.1)

b_o : είναι ένας πραγματικός σταθερός συντελεστής

Για απλοποίηση, θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης (6.1) είναι:

$$Y(0) = 0 \quad , \quad Y'(0) = 0$$

Η εξίσωση (6.1) μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:

$$\tau^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dY}{dt} + Y(t) = K_p U(t) \quad (6.2)$$

$$\tau^2 = \frac{a_2}{a_o} \quad , \quad \zeta = \frac{a_1}{2(a_o a_2)^{1/2}} \quad , \quad K_p = \frac{b_o}{a_o} \quad (6.3)$$

όπου τ είναι η **φυσική περίοδος** με διαστάσεις χρόνου, ζ είναι ο **συντελεστής απόσβεσης** (αδιάστατο μέγεθος) και K_p είναι η σταθερά ενίσχυσης (κέρδος – gain) του δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης.

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, η εξίσωση (6.2) γράφεται:

$$\tau^2 s^2 Y(s) + 2\tau\zeta s Y(s) + Y(s) = K_p U(s)$$

ή

$$Y(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} U(s) = G(s)U(s) \quad (6.4)$$

Συνεπώς, η γενική διατύπωση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος δεύτερης τάξης είναι:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \quad (6.5)$$

Ακολουθώντας, προσδιορίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, $G(s)$.

$$s_1 = -\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad , \quad s_2 = -\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad (6.6)$$

Συναρτήσει των ριζών s_1 και s_2 , η εξίσωση (6.4) γράφεται:

$$Y(s) = \frac{(K_p / \tau^2)}{(s - s_1)(s - s_2)} U(s) \tag{6.7}$$

Στη συνέχεια, διερευνούμε τη θέση των ριζών s_1 και s_2 στο μιγαδικό επίπεδο, συναρτήσει της τιμής του συντελεστή απόσβεσης ζ . Συγκεκριμένα, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Για $\zeta > 1$, η $G(s)$ θα έχει δύο άνισες πραγματικές αρνητικές ρίζες.

Για $\zeta = 1$, η $G(s)$ θα έχει δύο ίσες πραγματικές αρνητικές ρίζες στη θέση $(-1/\tau)$.

Για $0 < \zeta < 1$, η $G(s)$ θα έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος.

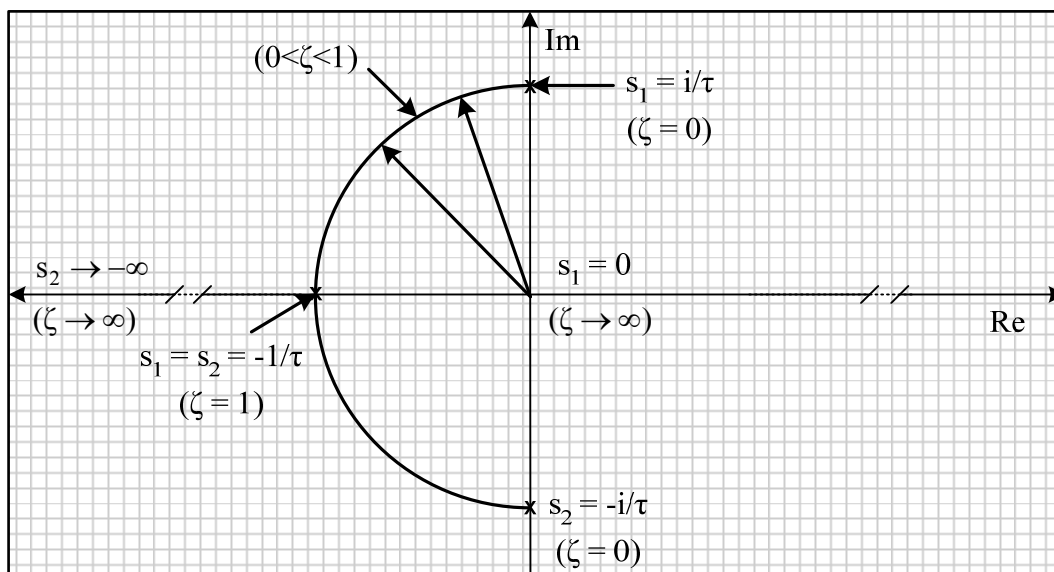
Για $\zeta = 0$, η $G(s)$ θα έχει δύο καθαρά φανταστικές ρίζες, $\pm i/\tau$.

Εάν υποθέσουμε ότι η τιμή της φυσικής περιόδου τ παραμένει σταθερή και ο συντελεστής απόσβεσης ζ μεταβάλλεται στο διάστημα $(0, +\infty)$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των ριζών s_1 και s_2 στο επίπεδο (Im-Re) θα ακολουθεί τη μεταβολή που περιγράφεται στην Εικόνα 6.1.

Από τη γραφική απεικόνιση της θέσης των s_1 και s_2 στην Εικόνα 6.1, παρατηρούμε ότι για

$$\zeta \rightarrow \infty : s_1 = 0, \quad s_2 = -\infty \quad , \quad \zeta = 0 : s_1 = (i/\tau), \quad s_2 = -(i/\tau)$$

$$\zeta = 1 : s_1 = s_2 = -(1/\tau) \quad , \quad 0 < \zeta < 1 : |s_1| = |s_2| = (1/\tau)$$



Εικόνα 6.1: Γεωμετρικός τόπος των ριζών s_1 και s_2 συναρτήσει του ζ ($0 \leq \zeta < \infty$).

6.2 Παραδείγματα Συστημάτων Δεύτερης Τάξης

6.2.1 Δύο Μη Αλληλεπιδρώντα Συστήματα Πρώτης Τάξης στη Σειρά

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα δύο μη ομογενών, γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά δύο διεργασιών πρώτης τάξης συνδεδεμένων στη σειρά.

$$\tau_1 \frac{dY_1}{dt} + Y_1(t) = K_{p1} U(t) \quad , \quad Y_1(0) = 0 \quad (6.8)$$

$$\tau_2 \frac{dY_2}{dt} + Y_2(t) = K_{p2} Y_1(t) \quad , \quad Y_2(0) = 0 \quad (6.9)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος $Y_1(t)$ της πρώτης διεργασίας αποτελεί το σήμα εισόδου στη δεύτερη διεργασία. Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις εξισώσεις (6.8) και (6.9), λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$(\tau_1 s + 1)Y_1(s) = K_{p1} U(s) \quad , \quad Y_1(s) = \frac{K_{p1}}{\tau_1 s + 1} U(s) \quad (6.10)$$

$$(\tau_2 s + 1)Y_2(s) = K_{p2} Y_1(s) \quad , \quad Y_2(s) = \frac{K_{p2}}{\tau_2 s + 1} Y_1(s) \quad (6.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (6.10) και (6.11), υπολογίζουμε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των $U(s)$ και $Y_2(s)$.

$$Y_2(s) = \frac{K_{p1} K_{p2}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} U(s) \quad (6.12)$$

Δύο δεξαμενές στη σειρά χωρίς αλληλεπίδραση

Μία φυσική διεργασία που αποτελείται από δύο μη αλληλεπιδρώντα συστήματα πρώτης τάξης στη σειρά, παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.2. Για να προσδιορίσουμε τη δυναμική συμπεριφορά της διεργασίας της Εικόνας 6.2, διατυπώνουμε τα ακόλουθα δυναμικά ισοζύγια μάζας για τις δύο δεξαμενές, θεωρώντας ότι η πυκνότητα ρ παραμένει σταθερή.

Δυναμικό ισοζύγιο όγκου για την πρώτη δεξαμενή:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_o(t) - q_1(t) \quad (6.13)$$

Δυναμικό ισοζύγιο όγκου για τη δεύτερη δεξαμενή:

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \quad (6.14)$$

Θεωρούμε ότι τα ρεύματα $q_1(t)$ και $q_2(t)$ εξαρτώνται γραμμικά από το αντίστοιχο ύψος του ρευστού στις δύο δεξαμενές, δηλαδή

$$q_1 = \frac{h_1(t)}{R_1} \quad , \quad q_2 = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (6.15)$$

όπου R_1 και R_2 είναι οι σταθερές τιμές των αντιστάσεων στα αντίστοιχα ρεύματα εκροής.

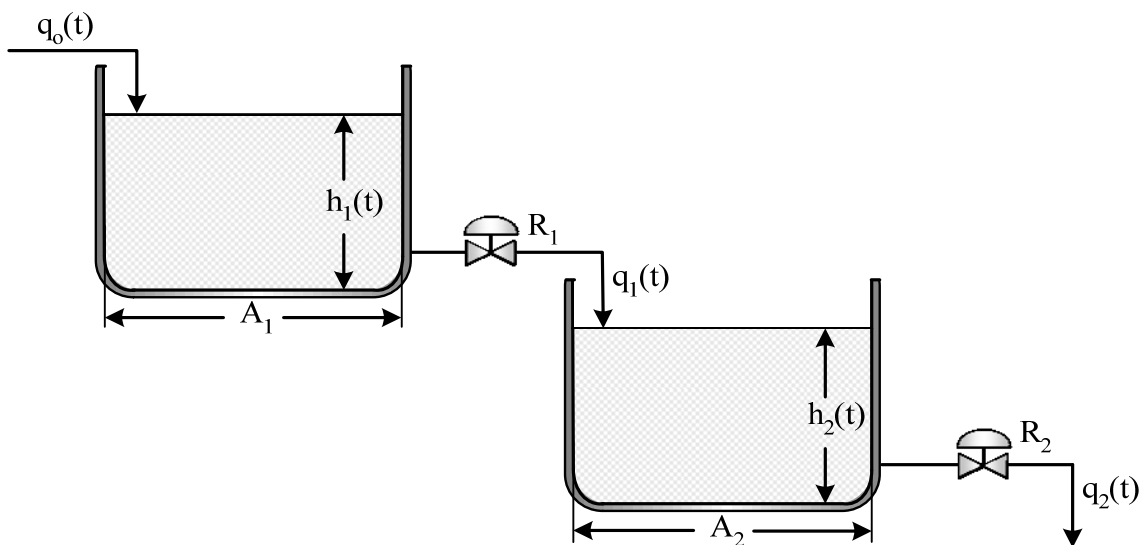
Ακολουθώντας, ορίζουμε τις μεταβλητές απόκλισης:

$$Q_o(t) = q_o(t) - q_{os} \quad , \quad Q_1(t) = q_1(t) - q_{1s} \quad , \quad Q_2(t) = q_2(t) - q_{2s} \quad (6.16)$$

και τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές χρονικές σταθερές:

$$\tau_1 = R_1 A_1 \quad , \quad \tau_2 = R_2 A_2 \quad (6.17)$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές απόκλισης και μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις εξισώσεις (6.13)-(6.15), λαμβάνουμε:



Εικόνα 6.2: Δύο δεξαμενές στη σειρά χωρίς αλληλοεπίδραση.

$$Q_1(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} Q_o(s) \quad (6.18)$$

$$H_2(s) = \frac{R_2}{\tau_2 s + 1} Q_1(s) \quad (6.19)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (6.18) και (6.19), προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των $Q_o(s)$ και $H_2(s)$:

$$H_2(s) = \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} Q_o(s) \quad (6.20)$$

όπου $R_2 (=K_p)$ είναι η ενίσχυση της διεργασίας. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των $Q_o(s)$ και $Q_2(s)$ θα δίνεται από την εξίσωση (6.21):

$$Q_2(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} Q_o(s) \quad (6.21)$$

Η παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:

$$Q_2(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} Q_o(s) \quad (6.22)$$

όπου,

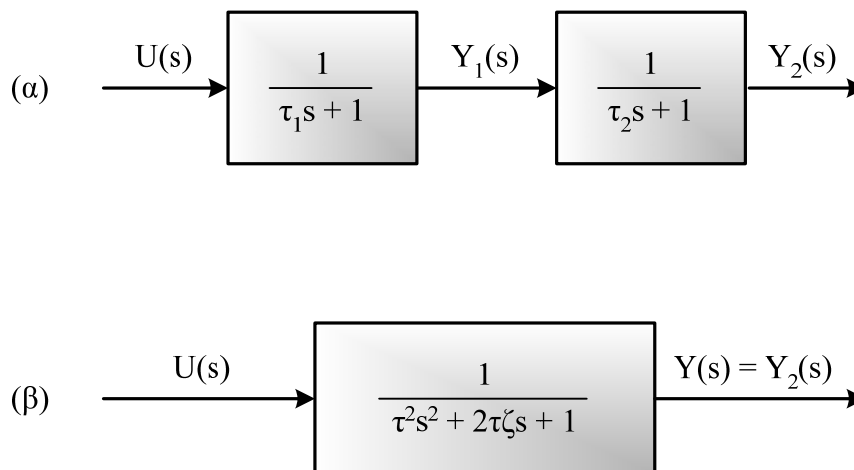
$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2} \quad , \quad \zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \geq 1 \quad (6.23)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος δεύτερης τάξης για $\zeta \geq 1$ (π.χ., όταν το σύστημα έχει δύο πραγματικές αρνητικές ρίζες), θα δίνεται από το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς των δύο μη αλληλεπιδρώντων συστημάτων πρώτης τάξης στη σειρά.

Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζονται οι δύο ισοδύναμες διατυπώσεις της συνάρτησης μεταφοράς ενός δευτεροβάθμιου συστήματος (για $\zeta \geq 1$) και οι σχέσεις που συνδέουν τις χρονικές σταθερές τ_1 και τ_2 των δύο πρωτοβάθμιων συστημάτων με τις χαρακτηριστικές παραμέτρους τ και ζ μιας διεργασίας δεύτερης τάξης. Τέλος, στην Εικόνα 6.3 παρουσιάζονται οι δύο ισοδύναμες διατυπώσεις της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος δεύτερης τάξης για $\zeta \geq 1$, υπό μορφή διαγράμματος βαθμίδων.

Πίνακας 6.1: Ισοδύναμη διατύπωση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος δεύτερης τάξης για $\zeta \geq 1$.

ΔΥΟ ΜΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΩΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ	ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}, \quad \zeta \geq 1$
$\tau_1 = -\frac{1}{s_1} = \tau(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$	$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$
$\tau_2 = -\frac{1}{s_2} = \tau(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$	$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1$



Εικόνα 6.3: (α) Σύστημα δύο μη αλληλεπιδρώντων διεργασιών πρώτης τάξης στη σειρά. (β) Ισοδύναμη διεργασία δεύτερης τάξης.

6.2.2 Δύο Αλληλεπιδρώντα Συστήματα Πρώτης Τάξης στη Σειρά

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα των δύο συζευγμένων, γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά δύο αλληλεπιδρώντων διεργασιών πρώτης τάξης στη σειρά.

$$\frac{dY_1}{dt} = \alpha_{11}Y_1(t) + \alpha_{12}Y_2(t) + U(t) \quad , \quad Y_1(t) = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{dY_2}{dt} = \alpha_{21}Y_1(t) + \alpha_{22}Y_2(t) \quad , \quad Y_2(t) = 0 \quad (6.25)$$

Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική συμπεριφορά του πρώτου συστήματος θα επηρεάζεται από τη δυναμική συμπεριφορά του δεύτερου. Το παραπάνω σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων γράφεται εναλλακτικά ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}U(t) \quad (6.26)$$

όπου $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t))^T$ και $U(t)$ είναι αντίστοιχα το διάνυσμα κατάστασης/ εξόδου και η μεταβλητή εισόδου του δυναμικού συστήματος. $\mathbf{A}(2 \times 2)$ και $\mathbf{B}(2 \times 1)$ είναι οι πίνακες των σταθερών συντελεστών του συστήματος. Τέλος, $\dot{\mathbf{Y}} = (dY_1/dt, dY_2/dt)^T$ είναι το διάνυσμα των πρώτων παραγώγων των μεταβλητών κατάστασης.

Ακολουθώντας, λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace των εξισώσεων (6.24) και (6.25):

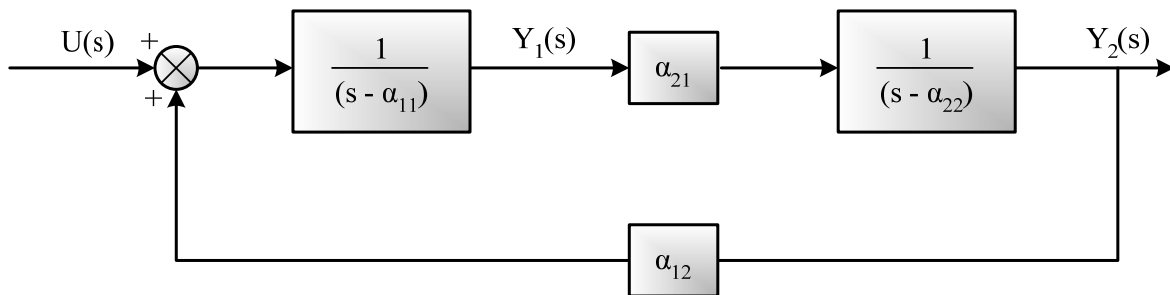
$$Y_1(s)(s - a_{11}) = a_{12}Y_2(s) + U(s) \quad (6.27)$$

$$Y_2(s)(s - a_{22}) = a_{21}Y_1(s) \quad (6.28)$$

Η γραφική απεικόνιση των εξισώσεων (6.27) και (6.28) παρουσιάζεται στο διάγραμμα βαθμίδων της Εικόνας 6.4. Σημειώνεται ότι στην προηγούμενη περίπτωση των διεργασιών χωρίς αλληλεπίδραση (βλέπε Εικόνα 6.3) δεν υπήρχε ο κλάδος ανατροφοδότησης που συνδέει τη μεταβλητή εξόδου $Y_2(t)$ με τη μεταβλητή $Y_1(t)$ (βλέπε εξισώσεις (6.24) και (6.27)).

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (6.24) και (6.25) μπορεί να μετατραπεί σε μία ισοδύναμη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Αρχικά, παραγωγίζουμε την εξίσωση (6.25) ως προς t :

$$\frac{d^2Y_2}{dt^2} = a_{21} \frac{dY_1}{dt} + a_{22} \frac{dY_2}{dt} \quad (6.29)$$



Εικόνα 6.4: Διάγραμμα βαθμίδων δύο αλληλεπιδρώντων συστημάτων πρώτης τάξης.

Ακολουθώς, αντικαθιστούμε την εξίσωση (6.24) στην εξίσωση (6.29):

$$\frac{d^2 Y_2}{dt^2} = a_{21} [a_{11} Y_1(t) + a_{12} Y_2(t) + U(t)] + a_{22} \frac{dY_2}{dt} \quad (6.30)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την Y_1 από την εξίσωση (6.25) στην εξίσωση (6.30). Έτσι, μετά από απλές πράξεις, παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{d^2 Y_2}{dt^2} = a_{21} \left[\frac{a_{11}}{a_{21}} \left(\frac{dY_2}{dt} - a_{22} Y_2(t) \right) + a_{12} Y_2(t) + U(t) \right] + a_{22} \frac{dY_2}{dt} \quad (6.31)$$

ή

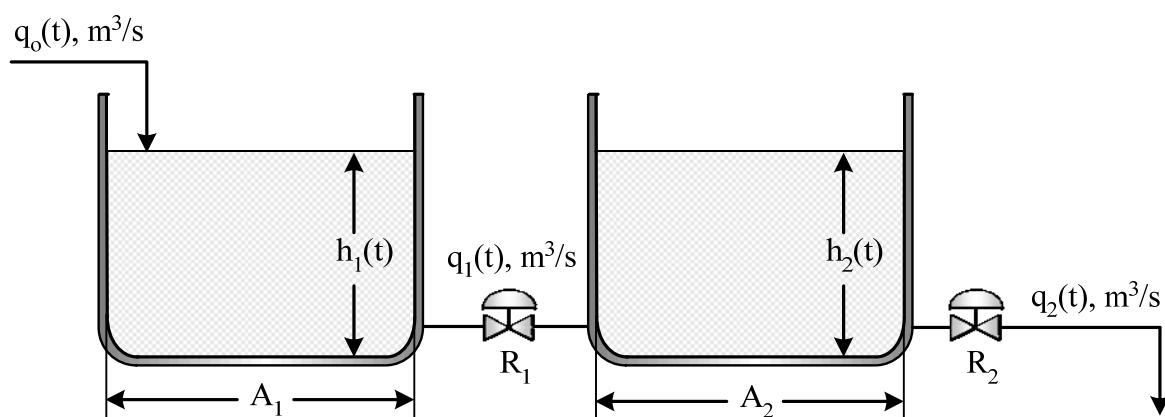
$$\frac{d^2 Y_2}{dt^2} + (-a_{11} - a_{22}) \frac{dY_2}{dt} + (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) Y_2(t) = a_{21} U(t) \quad (6.32)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6.32) έχει την ίδια την ίδια ακριβώς μορφή με την εξίσωση (6.1).

Δύο δεξαμενές στη σειρά με αλληλεπίδραση

Μια τυπική διεργασία που αποτελείται από δύο αλληλεπιδρώντα συστήματα πρώτης τάξης στη σειρά παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.5. Για να προσδιορίσουμε τη δυναμική συμπεριφορά της διεργασίας της Εικόνας 6.5, διατυπώνουμε τα δυναμικά ισοζύγια μάζας για τις δύο δεξαμενές, θεωρώντας ότι η πυκνότητα ρ παραμένει σταθερή.

Θεωρούμε επίσης ότι τα ρεύματα εκροής $q_1(t)$ και $q_2(t)$ μεταβάλλονται γραμμικά σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:



Εικόνα 6.5: Δύο δεξαμενές στη σειρά με αλληλεπίδραση.

$$q_1(t) = \frac{1}{R_1} (h_1(t) - h_2(t)) \quad , \quad q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (6.33)$$

Τα δυναμικά ισοζύγια μάζας για τις δύο δεξαμενές συναρτήσει των μεταβλητών απόκλισης ($H_1(t) = h_1(t) - h_{1s}$, $H_2(t) = h_2(t) - h_{2s}$, $Q_o(t) = q_o(t) - q_{os}$, $Q_1(t) = q_1(t) - q_{1s}$ και $Q_2(t) = q_2(t) - q_{2s}$) γράφονται:

$$A_1 \frac{dH_1}{dt} = Q_o(t) - Q_1(t) \quad , \quad H_1(t=0) = 0 \quad (6.34)$$

$$A_2 \frac{dH_2}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \quad , \quad H_2(t=0) = 0 \quad (6.35)$$

Ακολούθως, μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις εξισώσεις (6.33) - (6.35):

$$R_1 Q_1(s) = H_1(s) - H_2(s) \quad , \quad R_2 Q_2(s) = H_2(s) \quad (6.36)$$

$$A_1 s H_1(s) = Q_o(s) - Q_1(s) \quad (6.37)$$

$$A_2 s H_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s) \quad (6.38)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις χαρακτηριστικές χρονικές σταθερές τ_1 και τ_2 των δύο δεξαμενών:

$$\tau_1 = R_1 A_1 \quad ; \quad \tau_2 = R_2 A_2 \quad (6.39)$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (6.36)-(6.39) προκύπτει εύκολα η ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των $Q_o(s)$ και $H_2(s)$:

$$H_2(s) = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1} Q_o(s) \quad (6.40)$$

Σημειώνεται ότι, για τις δύο δεξαμενές χωρίς αλληλεπίδραση, η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των $Q_o(s)$ και $H_2(s)$ έχει την ακόλουθη μορφή (6.41) (βλέπε εξίσωση (6.20)):

$$H_2(s) = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2) s + 1} Q_o(s) \quad (6.41)$$

Από τη σύγκριση των εξισώσεων (6.40) και (6.41) προκύπτει ότι ο επιπλέον όρος $A_1 R_2$, που εμφανίζεται στην εξίσωση (6.40), οφείλεται στην ύπαρξη του κλάδου αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο διεργασιών πρώτης τάξης στη σειρά (βλέπε Εικόνα 6.5). Συνεπώς, η διεργασία με αλληλεπίδραση θα αποκρίνεται βραδύτερα, διότι η τιμή του συντελεστή απόσβεσης, $\zeta (= (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) / (2\sqrt{\tau_1 \tau_2}))$, θα είναι μεγαλύτερη από εκείνη του συστήματος των δύο δεξαμενών χωρίς αλληλεπίδραση.

Παράδειγμα 6.1: Σύγκριση των δυναμικών αποκρίσεων δύο δεξαμενών στη σειρά με ή χωρίς αλληλεπίδραση

Θεωρούμε τη διεργασία της Εικόνας 6.2. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της μεταβλητής απόκλισης, $H_2(t)$, σε μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου, $Q_o(t) = 1H(t)$. Εάν $\tau_1 = \tau_2 = 1 \text{ min}$, να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της $H_2(t)$ και να γίνει η γραφική παράσταση της $(H_2(t)/K_p)$ ως προς t .

Ακολούθως, για τη διεργασία της Εικόνας 6.5, να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της $H_2(t)$ σε μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου $Q_o(t)$. Εάν $\tau_1 = \tau_2 = A_1 R_2 = 1 \text{ min}$, να υπολογιστεί η χρονική απόκριση της $H_2(t)$ και να γίνει η γραφική παράσταση της $(H_2(t)/K_p)$ ως προς t . Τέλος, να συγκριθούν και να σχολιαστούν τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω περιπτώσεων.

Λύση:

Στην πρώτη περίπτωση, των δύο δεξαμενών χωρίς αλληλεπίδραση, η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των $H_2(s)$ και $Q_o(s)$ θα δίνεται από την εξίσωση (6.20), όπου $K_p = R_2$.

Για μοναδιαία βηματική μεταβολή της μεταβλητής εισόδου, η εξίσωση (6.20) γράφεται:

$$H_2(s) = \frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)s} \quad (6.42)$$

Η χρονική απόκριση της $H_2(t)$ υπολογίζεται εύκολα από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (6.42). Συνεπώς, με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside (βλέπε Παράρτημα Α), λαμβάνουμε:

$$H_2(t) = K_p \left(1 - \frac{\tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{(\tau_2 - \tau_1)} e^{-t/\tau_2} \right) \quad (6.43)$$

Εάν $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, η εξίσωση (6.42) γράφεται:

$$H_2(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (6.44)$$

Στην περίπτωση αυτή, η χρονική απόκριση $H_2(t)$ θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$H_2(t) = K_p (1 - e^{-t/\tau} - (t/\tau) e^{-t/\tau}) \quad (6.45)$$

Για $\tau = 1 \text{ min}$, η εξίσωση (6.45) γράφεται:

$$(H_2(t)/K_p) = (1 - e^{-t} - t e^{-t}) \quad (6.46)$$

Για το σύστημα των δύο δεξαμενών με αλληλεπίδραση, για $\tau_1 = \tau_2 = A_1 R_2 = 1 \text{ min}$, η χρονική απόκριση της διεργασίας $H_2(t)$ σε μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου υπολογίζεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (6.40):

$$H_2(s) = \frac{K_p}{(s^2 + 3s + 1)s} = \frac{K_p}{(2,618s + 1)(0,382s + 1)s} \quad (6.47)$$

Ακολουθώντας, με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside, υπολογίζουμε την αδιάστατη χρονική απόκριση $(H_2(t)/K_p)$.

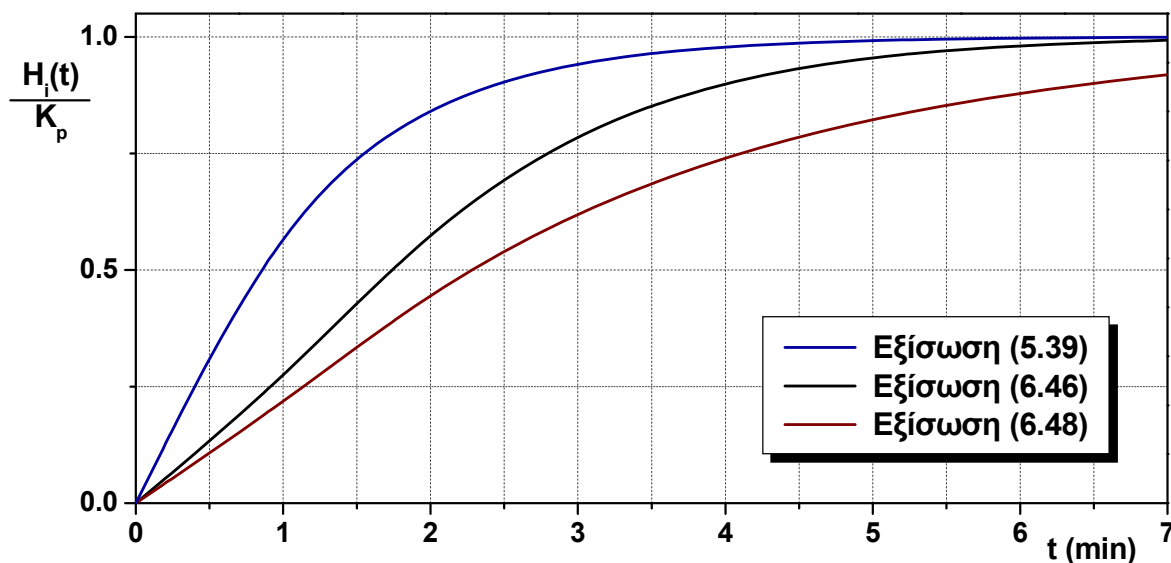
$$(H_2(t)/K_p) = (1 - 1,17e^{-t/2,618} + 0,17e^{-t/0,382}) \quad (6.48)$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να επαληθευτούν με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter6\leg6_1.m
File Edit Text Desktop Window Help
[Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons] [Icons]
1  % Παράδειγμα 6.1 : Σύγκριση των δυναμικών αποκρίσεων δύο δεξαμενών
2  %                               στη σειρά με ή χωρίς αλληλεπίδραση
3
4  Kp = 1.5 ;           % ορισμός της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας
5  T1 = 1 ;           % ορισμός 1ης χρονικής σταθεράς
6  T2 = 1 ;           % ορισμός 2ης χρονικής σταθεράς
7  A1 = 1 ;           % ορισμός εμβαδού 1ου δοχείου
8  R2 = 1 ;           % ορισμός αντίστασης στο 2ο ρεύμα
9  T  = 1 ;           % ορισμός χρονικής σταθεράς ενός δοχείου 1ης τάξης
10
11 % συνάρτηση μεταφοράς 2 δοχείων χωρίς αλληλεπίδραση
12 sysn_i = tf([Kp],[T1*T2 T1+T2 1]);
13
14 [yn_i,t1] = step(sysn_i);           % απόκριση σε βηματική μεταβολή
15 yd1 = yn_i/Kp;                     % υπολογισμός αδιάστατης απόκρισης
16
17 % συνάρτηση μεταφοράς 2 δοχείων με αλληλεπίδραση
18 sysint = tf([Kp],[T1*T2 T1+T2+A1*R2 1]);
19
20 [yint,t2] = step(sysint);           % απόκριση σε βηματική μεταβολή
21 yd2 = yint/Kp;                     % υπολογισμός αδιάστατης απόκρισης
22
23 sysfirst = tf([Kp],[T 1]);          % συνάρτηση μεταφοράς 1 δοχείου
24 [yfirst,t3] = step(sysfirst);      % απόκριση σε βηματική μεταβολή
25 yd3 = yfirst/Kp;                   % υπολογισμός αδιάστατης απόκρισης
26
27 plot(t1,yd1,t2,yd2,t3,yd3)         % σχεδίαση αδιάστατων αποκρίσεων
28 grid on                             % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
29
30 ylabel('H_1(t)/K_p','FontSize',12) % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
31 xlabel('Time, min','FontSize',12)  % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
32
33 pos = 0;                             % θέση υπομνήματος
34
35 % δημιουργία υπομνήματος
36 legend(['X\omega\rho\iota\varsigma \alpha\lambdaambda\lambdaambda\eta\eta'...
37         '\lambda\epsilon\pi\iota\iota\delta\epsilon\rho\alpha\sigma\eta\eta'],...
38        ['M\epsilon\pi\iota\alpha\lambdaambda\lambdaambda\eta\eta\lambdaambda\epsilon\pi\iota\pi\iota'...
39         '\iota\delta\epsilon\rho\alpha\sigma\eta\eta'], ['1^\eta\eta\varsigma'...
40         '\tau\alpha\chi\iota\eta\varsigma',pos])
41
script Ln 41 Col 1 OVR

```



Εικόνα 6.6: Γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων (5.39), (6.46) και (6.48).

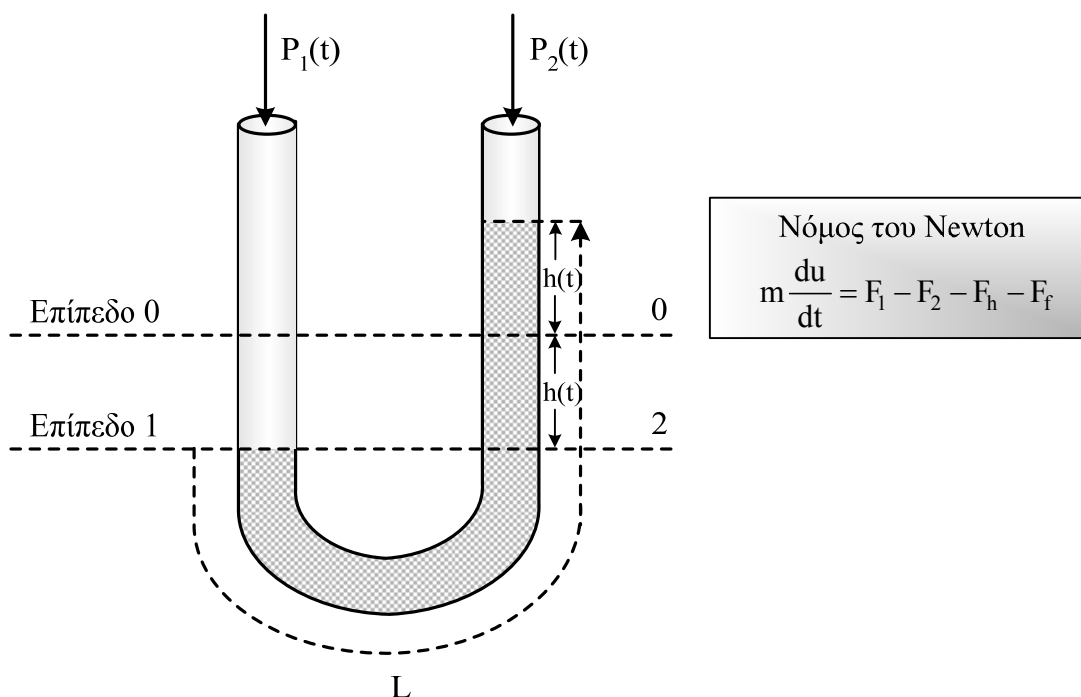
Στην Εικόνα 6.6 απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων (6.46), (6.48), καθώς και η αδιάστατη απόκριση $(H_1(t)/K_p) = (1 - e^{-t})$ για μια δεξαμενή (διεργασία πρώτης τάξης).

Το συμπέρασμα που προκύπτει από την εξέταση των γραφικών παραστάσεων της Εικόνας 6.6 είναι ότι **το δυναμικό σύστημα χωρίς αλληλεπίδραση αποκρίνεται πιο γρήγορα από εκείνο με αλληλεπίδραση.**

6.2.3 Δυναμική Απόκριση Μανομέτρου Υγρού

Για τη μέτρηση της πίεσης ή της διαφορικής πίεσης σε μία φυσική διεργασία συχνά χρησιμοποιείται το μανόμετρο υγρού, που παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 6.7. Όταν οι πιέσεις $P_1(t)$ (Nm^{-2}) και $P_2(t)$ (Nm^{-2}), που ασκούνται στα δύο άκρα του μανομετρικού σωλήνα είναι ίσες, οι επιφάνειες του υγρού στα δύο σκέλη του μανομέτρου θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς (0,0). Εάν η πίεση P_1 είναι μεγαλύτερη της πίεσης P_2 , το υγρό θα κινηθεί από το πρώτο στο δεύτερο σκέλος του μανομέτρου. Τελικά, οι στάθμες του υγρού στα δύο σκέλη του μανομέτρου θα ισοροπήσουν σε ένα νέο επίπεδο (1,2) (βλέπε Εικόνα 6.7).

Σύμφωνα με το νόμο του Newton, η κίνηση της μάζας του υγρού ($m = AL\rho$, kg) στο μανόμετρο θα εξαρτάται από τις δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στις δύο ελεύθερες



Εικόνα 6.7: Μανόμετρο υγρού σχήματος U.

επιφάνειες του υγρού ($F_1 = P_1 A$, N και $F_2 = P_2 A$, N), την υδροστατική πίεση ($F_h = 2A h \rho g$, N), που ασκείται στο σημείο 2 λόγω του βάρους της στήλης του υγρού, και τη δύναμη τριβής ($F_f = A \Delta P_f$, N), που οφείλεται στη ροή του ρευστού στο μανόμετρο. Θεωρώντας ότι η ροή του ρευστού στον κυλινδρικό σωλήνα του μανομέτρου είναι στρωτή, η πτώση πίεσης λόγω τριβής θα δίνεται από τη γνωστή εξίσωση του Poiseuille.

$$\Delta P_f = 8\mu L u / r^2 \quad (6.49)$$

όπου μ ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$) είναι το ιξώδες του ρευστού. L (m) και r (m) είναι το μήκος της υγρής στήλης και η ακτίνα του σωλήνα αντίστοιχα. Η μέση ταχύτητα ροής του ρευστού, u (ms^{-1}), λόγω της διαφορικής πίεσης $\Delta P = (P_1 - P_2)$, θα είναι ίση με τη χρονική μεταβολή της απόκλισης της στάθμης του υγρού από το αρχικό επίπεδο αναφοράς, δηλαδή $u = (dh/dt)$.

Συνεπώς, από την εφαρμογή του δυναμικού ισοζυγίου δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό του μανομέτρου, λαμβάνουμε:

$$m \frac{du}{dt} = F_1(t) - F_2(t) - F_h(t) - F_f(t) \quad (6.50)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6.50) τις διατυπώσεις των m , u , F_1 , F_2 , F_h και F_f , λαμβάνουμε:

$$A L \rho \frac{d^2 h}{dt^2} = A \left(P_1(t) - P_2(t) - 2h(t) \rho g - \frac{8\mu L}{r^2} \frac{dh}{dt} \right) \quad (6.51)$$

ή

$$\frac{L}{2g} \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{4\mu L}{\rho g r^2} \frac{dh}{dt} + h(t) = \frac{(P_1(t) - P_2(t))}{2\rho g} \quad (6.52)$$

όπου A (m^2) είναι η διατομή του σωλήνα, ρ (kgm^{-3}) η πυκνότητα του ρευστού και g (ms^{-2}) η επιτάχυνση της βαρύτητας. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6.52) έχει την ίδια ακριβώς μορφή με την εξίσωση (6.1), που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος δεύτερης τάξης. Η φυσική περίοδος, τ (s), ο συντελεστής απόσβεσης, ζ (αδιάστατος), και η σταθερά ενίσχυσης της διεργασίας, K_p ($kg^{-1}m^2s^2$), θα δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\tau = \left(\frac{L}{2g} \right)^{1/2}, \quad \zeta = \frac{4\mu}{\rho r^2} \left(\frac{L}{2g} \right)^{1/2}, \quad K_p = \frac{1}{2\rho g} \quad (6.53)$$

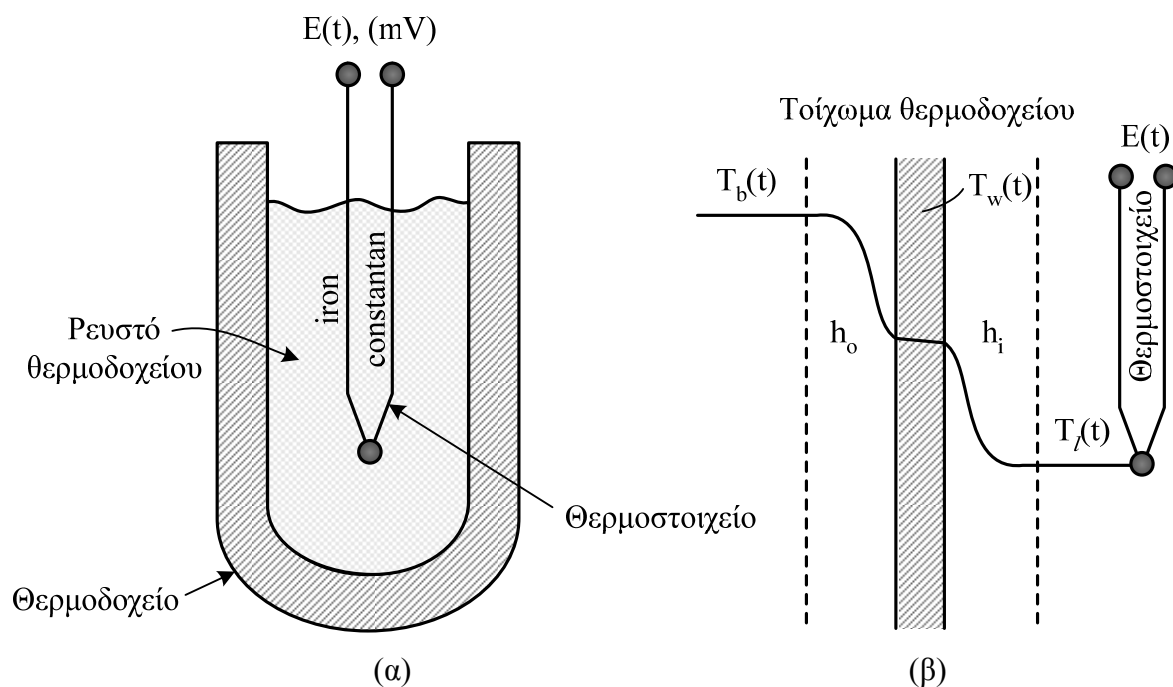
Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της μετασχηματισμένης μεταβλητής απόκλισης της στάθμης του υγρού $H(s)$ και της μετασχηματισμένης μεταβλητής εισόδου $\Delta P(s)$ θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$H(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1} \Delta P(s) \quad (6.54)$$

6.2.4 Δυναμική Απόκριση Συστήματος Θερμοστοιχείου – Θερμοδοχείου

Μια συνηθισμένη διάταξη μέτρησης της θερμοκρασίας ενός ρευστού παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.8. Η σύνθετη αυτή διάταξη αποτελείται από τον αισθητήρα μέτρησης της θερμοκρασίας (π.χ., θερμοστοιχείο), το θερμοδοχείο και το ρευστό αναφοράς στο οποίο βρίσκεται εμβαπτισμένο το θερμοστοιχείο.

Το θερμοστοιχείο αποτελείται συνήθως από ένα ζεύγος δύο διαφορετικών μεταλλικών αγωγών (π.χ., platinum/rhodium, chromel/alumel, copper/constantan, iron/constantan) ενωμένων στο κάτω άκρο τους. Καθώς η θερμοκρασία του περιβάλλοντος ρευστού



Εικόνα 6.8: Μετρητική διάταξη θερμοδοχείου – θερμοστοιχείου.

μεταβάλλεται, στα άκρα των δύο μεταλλικών αγωγών αναπτύσσεται ένα ηλεκτρικό δυναμικό, $E(t)$ σε mV, λόγω του **θερμοηλεκτρικού φαινομένου**, που μπορεί εύκολα να μετρηθεί. Η ευαισθησία του θερμοστοιχείου εξαρτάται από το είδος των μεταλλικών αγωγών, που είναι κατασκευασμένο το θερμοστοιχείο, και κυμαίνεται μεταξύ 6 – 60 mV/°C. Συνήθως, το θερμοστοιχείο τοποθετείται σε ένα θερμοδοχείο το οποίο περιέχει ένα μη διαβρωτικό ρευστό, (π.χ., λάδι). Ακολούθως, η σύνθετη διάταξη του (θερμοδοχείου – θερμοστοιχείου) τοποθετείται στην υγρή φάση (π.χ., ενός χημικού αντιδραστήρα), της οποίας τη θερμοκρασία θέλουμε να μετρήσουμε. Έτσι αποφεύγεται η άμεση επαφή του αισθητηρίου με διαβρωτικά μέσα ή ρευστά μεγάλου ιξώδους, που μπορούν να διαβρώσουν ή να καταστρέψουν τα άκρα των μεταλλικών αγωγών του θερμοστοιχείου.

Στο δεξιό μέρος της Εικόνας 6.8, σημειώνεται το θερμοκρασιακό προφίλ από το περιβάλλον ρευστό, του οποίου τη θερμοκρασία επιθυμούμε να μετρήσουμε, στο τοίχωμα και τελικά στο ρευστό του θερμοδοχείου. Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας εξαρτάται από τον εξωτερικό, h_o ($\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$), και τον εσωτερικό, h_i , συντελεστή μεταφοράς θερμότητας, αριστερά και δεξιά του τοιχώματος του θερμοδοχείου (βλέπε Εικόνα 6.8(β)).

Εάν θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία του ρευστού στο θερμοδοχείο, $T_l(t)$, και η θερμοκρασία του τοιχώματος, $T_w(t)$, είναι ανεξάρτητες των χωρικών συντεταγμένων, τότε,

η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος θα περιγράφεται από τα ακόλουθα δύο ισοζύγια ενέργειας για το τοίχωμα και το ρευστό του θερμοδοχείου.

$$m_w C_{pw} \frac{dT_w}{dt} = A_o h_o (T_b(t) - T_w(t)) - A_i h_i (T_w(t) - T_l(t)) \quad (6.55)$$

$$m_l C_{pl} \frac{dT_l}{dt} = A_i h_i (T_w(t) - T_l(t)) \quad (6.56)$$

όπου m_w (kg), m_l (kg), C_{pw} ($\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$) και C_{pl} ($\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$) είναι η μάζα του μεταλλικού τοιχώματος του θερμοδοχείου, η μάζα του ρευστού και οι αντίστοιχες ειδικές θερμότητες. A_o (m^2) και A_i (m^2) είναι αντίστοιχα η εξωτερική και η εσωτερική επιφάνεια εναλλαγής θερμότητας.

Ακολουθως, εισάγουμε τις χαρακτηριστικές χρονικές σταθερές θέρμανσης/ ψύξης του τοιχώματος και του ρευστού του θερμοδοχείου, καθώς και την αδιάστατη σταθερά α .

$$\tau_1 = \frac{m_w C_{pw}}{A_o h_o}, \quad \tau_2 = \frac{m_l C_{pl}}{A_i h_i}, \quad \alpha = \frac{A_i h_i}{A_o h_o} \quad (6.57)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω σταθερές στις εξισώσεις (6.55) – (6.56), τελικά λαμβάνουμε:

$$\tau_1 \frac{dT_w}{dt} + T_w(t)(1 + \alpha) = \alpha T_l(t) + T_b(t) \quad (6.58)$$

$$\tau_2 \frac{dT_l}{dt} + T_l(t) = T_w(t) \quad (6.59)$$

Από τις εξισώσεις (6.58) και (6.59) προκύπτει εύκολα (βλέπε επίσης ενότητα 6.2.2) η ακόλουθη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά της μετρητικής διάταξης της Εικόνας 6.8.

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 T_l}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2(1 + \alpha)) \frac{dT_l}{dt} + T_l(t) = T_b(t) \quad (6.60)$$

6.3 Μεταβατική Απόκριση Συστημάτων Δεύτερης Τάξης

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τη δυναμική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης σε πρότυπες μεταβολές (π.χ., στιγμιαία παλμική, βηματική και ημιτονοειδή) του σήματος εισόδου.

6.3.1 Απόκριση σε Στιγμιαία Παλμική Μεταβολή

Θεωρούμε ότι η στιγμιαία παλμική μεταβολή $U(t) = \alpha \delta(t)$ εισάγεται σε μια διεργασία δεύτερης τάξης (βλέπε εξίσωση (6.7)). Σύμφωνα με τον Πίνακα Α.1, ο μετασχηματισμός Laplace του παλμικού σήματος εισόδου είναι:

$$U(s) = \alpha \delta(t) \quad , \quad U(s) = \alpha \quad (6.61)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (6.61) στην εξίσωση (6.7), λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{(K_p \alpha / \tau^2)}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (6.62)$$

Ακολούθως, με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside, υπολογίζεται η χρονική απόκριση της διεργασίας δεύτερης τάξης σε παλμική μεταβολή. Ανάλογα με την τιμή του συντελεστή απόσβεσης ζ , οι ρίζες s_1 και s_2 μπορεί να είναι πραγματικές αρνητικές για $\zeta > 1$, αρνητικές και ίσες για $\zeta = 1$, και συζυγείς μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος για $0 < \zeta < 1$. Συνεπώς, η χρονική απόκριση $Y(t)$ θα δίνεται από τις ακόλουθες τρεις αναλυτικές λύσεις:

Περίπτωση 1: Υπεραποσβεσμένη απόκριση ($\zeta > 1$)

$$Y(t) = \frac{(K_p \alpha / \tau^2) e^{\left(-\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}\right)t}}{\left(-\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} + \frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}\right)} + \frac{(K_p \alpha / \tau^2) e^{\left(-\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}\right)t}}{\left(-\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} + \frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}\right)}$$

ή

$$Y(t) = \frac{K_p \alpha}{\tau} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{\zeta t}{\tau}} \sinh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau}\right) \quad (6.63)$$

όπου η υπερβολική συνάρτηση $\sinh\theta$ ορίζεται ως εξής:

$$\sinh\theta = \frac{1}{2} (e^\theta - e^{-\theta}) \quad , \quad \theta = (t/\tau)\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.64)$$

Περίπτωση 2: Κρίσιμα αποσβεσμένη απόκριση ($\zeta = 1$)

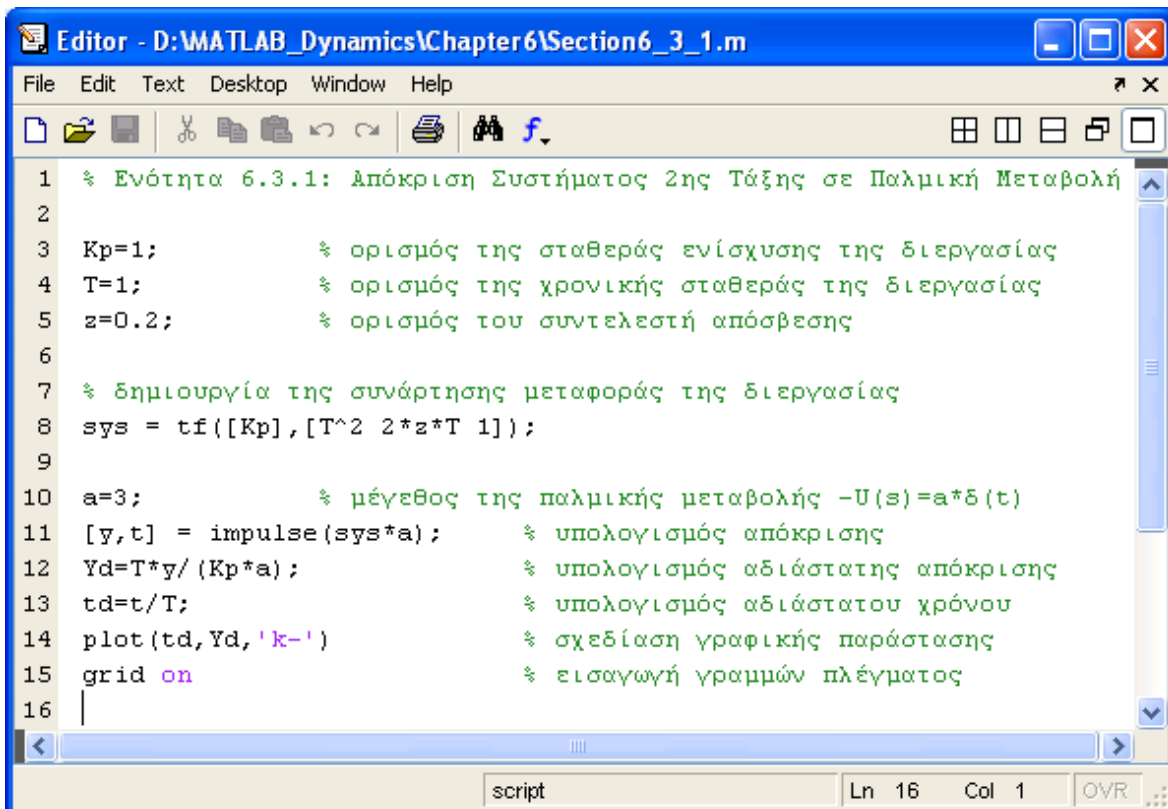
$$Y(t) = \frac{K_p \alpha}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.65)$$

Περίπτωση 3: Υποαποσβεσμένη απόκριση ($0 < \zeta < 1$)

$$Y(t) = \frac{K_p \alpha}{\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2} \frac{t}{\tau}\right) \quad (6.66)$$

Οι γραφικές απεικονίσεις των εξισώσεων (6.63), (6.65) και (6.66) παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.9.

Η επίλυση της εξίσωσης (6.62) και η γραφική παράσταση της $Y(t)$ ως προς t μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.



```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter6\Section6_3_1.m
File Edit Text Desktop Window Help
1  % Ενότητα 6.3.1: Απόκριση Συστήματος 2ης Τάξης σε Παλμική Μεταβολή
2
3  Kp=1;           % ορισμός της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας
4  T=1;           % ορισμός της χρονικής σταθεράς της διεργασίας
5  z=0.2;        % ορισμός του συντελεστή απόσβεσης
6
7  % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας
8  sys = tf([Kp],[T^2 2*z*T 1]);
9
10 a=3;           % μέγεθος της παλμικής μεταβολής -U(s)=a*d(t)
11 [y,t] = impulse(sys*a); % υπολογισμός απόκρισης
12 Yd=T*y/(Kp*a); % υπολογισμός αδιάστατης απόκρισης
13 td=t/T;       % υπολογισμός αδιάστατου χρόνου
14 plot(td,Yd,'k-') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
15 grid on       % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
16
script Ln 16 Col 1 OVR

```


6.3.2 Απόκριση σε Βηματική Μεταβολή

Θεωρούμε ότι η μεταβλητή εισόδου μεταβάλλεται βηματικά, δηλαδή

$$U(t) = \alpha H(t) \quad , \quad U(s) = \alpha/s \quad (6.67)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (6.67) στην εξίσωση (6.7) λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{(K_p \alpha / \tau^2)}{(s - s_1)(s - s_2)s} \quad (6.68)$$

Η χρονική απόκριση της διεργασίας δεύτερης τάξης, $Y(t)$, σε βηματική μεταβολή της $U(t)$ θα δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (6.68). Συγκεκριμένα, διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Υπεραποσβεσμένη απόκριση ($\zeta > 1$)

Για $\zeta > 1$, η $Y(s)$ θα έχει δύο πραγματικές αρνητικές ρίζες και μία ρίζα στη θέση $s = 0$. Αντικαθιστώντας τις ρίζες s_1 και s_2 από την εξίσωση (6.6) στην εξίσωση (6.68), υπολογίζουμε, με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside, τη χρονική απόκριση της $Y(t)$.

$$Y(t) = K_p \alpha \left\{ 1 - e^{-\zeta t / \tau} \left[\cosh \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) \right] \right\} \quad (6.69)$$

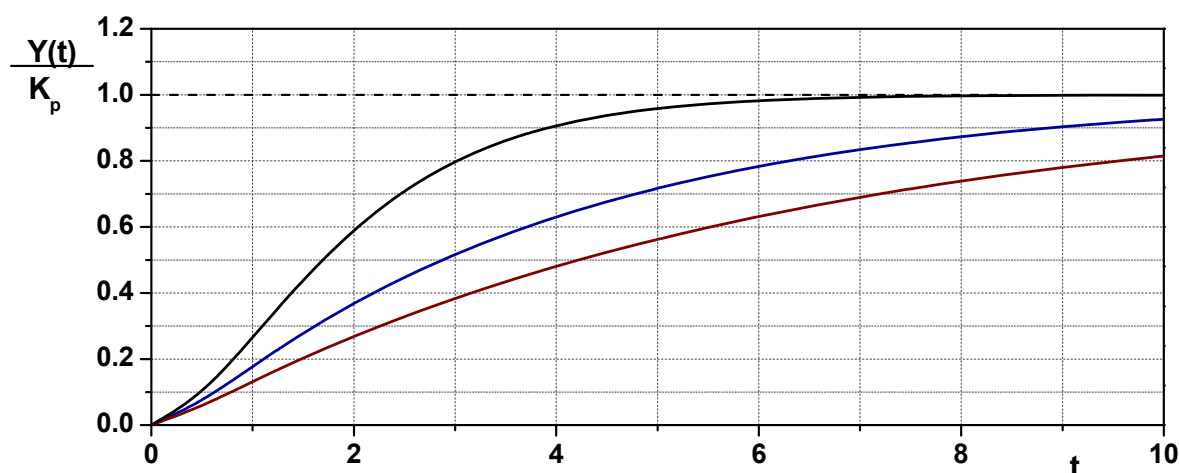
Η απόκριση αυτή ονομάζεται υπεραποσβεσμένη (overdamped). Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (6.69) παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.10. Παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή του συντελεστή απόσβεσης ζ αυξάνεται, η διεργασία αποκρίνεται βραδύτερα. Σημειώνεται ότι στο σημείο $t = 0$, η κλίση της αδιάστατης απόκρισης ($Y(t)/K_p \alpha$) είναι ίση με μηδέν.

Περίπτωση 2: Κρίσιμα αποσβεσμένη απόκριση ($\zeta = 1$)

Για $\zeta = 1$, η $Y(s)$ θα έχει δύο ίσες πραγματικές, αρνητικές ρίζες ($s_1 = s_2 = -1/\tau$) και μία ρίζα στη θέση $s = 0$. Στην περίπτωση αυτή, από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (6.68), υπολογίζουμε την ακόλουθη αναλυτική λύση για την $Y(t)$:

$$Y(t) = K_p \alpha \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (6.70)$$

Η απόκριση αυτή ονομάζεται κρίσιμα αποσβεσμένη (critically damped). Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (6.70) παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.10.



Εικόνα 6.10: Υπεραποσβεσμένη ($\zeta=2$ και 3) και κρίσιμα αποσβεσμένη ($\zeta=1$) απόκριση (η τιμή της φυσικής περιόδου είναι: $\tau=1$).

Περίπτωση 3: Υποαποσβεσμένη απόκριση ($0 < \zeta < 1$)

Για $0 < \zeta < 1$, η $Y(s)$ θα έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες και μια ρίζα στη θέση $s=0$. Στην περίπτωση αυτή, η χρονική απόκριση της διεργασίας θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$Y(t) = K_p \alpha \left\{ 1 - e^{-\zeta t / \tau} \left[\cos \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{\tau} \right) \right] \right\} \quad (6.71)$$

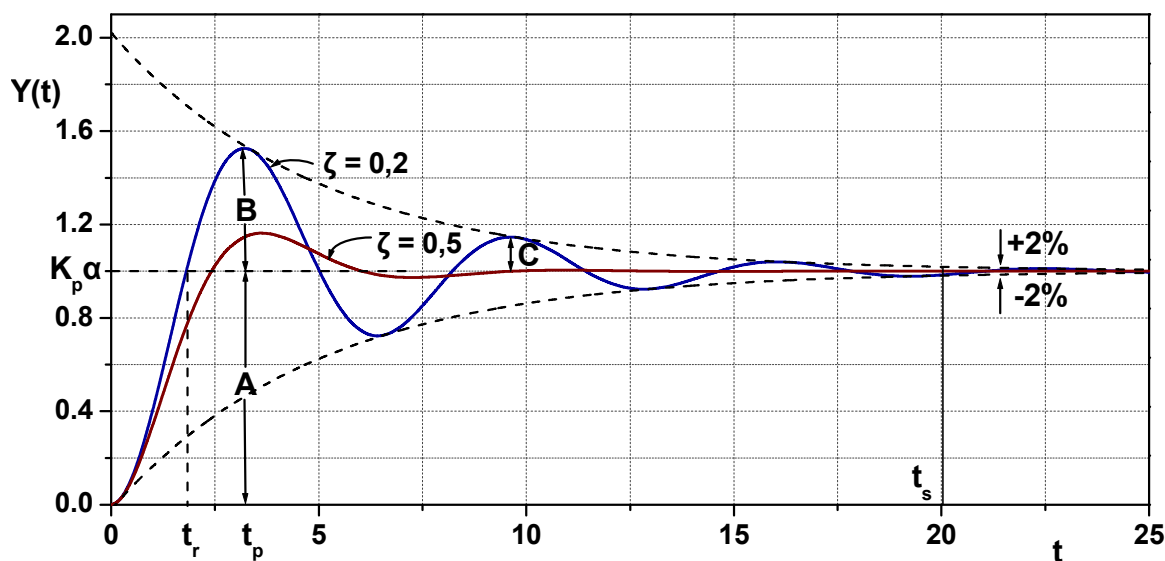
ή την ισοδύναμή της μορφή

$$Y(t) = K_p \alpha \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta t / \tau} \sin \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{\tau} + \varphi \right) \right\} \quad (6.72)$$

όπου

$$\varphi = \tan^{-1}(\sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta)$$

Η απόκριση αυτή ονομάζεται υποαποσβεσμένη (underdamped). Η γραφική παράσταση της $Y(t)$ (βλέπε εξισώσεις (6.71) ή (6.72)) παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.11, για δύο διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ ($=0,2$ και $0,5$). Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή, το εύρος της ταλαντωτικής απόκρισης ελαττώνεται με το χρόνο. Συγκεκριμένα, από τη χρονική απεικόνιση της $Y(t)$ προκύπτουν οι ακόλουθες χαρακτηριστικές τιμές:



Εικόνα 6.11: Υποαποσβεσμένη απόκριση ($0 < \zeta < 1$), $\tau = 1$.

A: ($= K_p \alpha$) είναι η τελική τιμή της $Y(t)$ στη νέα μόνιμη κατάσταση.

B: ($= Y(t_p) - K_p \alpha$) είναι η υπέρβαση της υποαποσβεσμένης απόκρισης από την τελική τιμή της, στο πρώτο μέγιστο της $Y(t)$.

$Y(t_p)$: ($= A + B$) είναι η τιμή της υποαποσβεσμένης ταλαντωτικής απόκρισης $Y(t)$ στη χρονική στιγμή t_p , εμφάνισης του πρώτου μεγίστου της $Y(t)$.

C: είναι η υπέρβαση της υποαποσβεσμένης ταλαντωτικής απόκρισης από την τελική τιμή της, στο δεύτερο μέγιστο της $Y(t)$.

Για να υπολογίσουμε τους χρόνους στους οποίους εμφανίζονται διαδοχικά τα μέγιστα στην απόκριση της $Y(t)$, παραγωγίζουμε την εξίσωση (6.71) ή (6.72) ως προς t και, στη συνέχεια, εξισώνουμε το αποτέλεσμα με μηδέν. Έτσι, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\sin(\omega t) = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{1 - \zeta^2} / \tau$$

όπου ω (radians/χρόνος) είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλαντωτικής απόκρισης. Συνεπώς, στις χρονικές στιγμές $t: (\pi/\omega), (3\pi/\omega), \text{ κλπ.}$, η χρονική απόκριση θα παρουσιάζει το πρώτο, δεύτερο κ.ο.κ. μέγιστο στην τιμή της $Y(t)$.

Χρόνος ανύψωσης (rise time): Ο χρόνος που για πρώτη φορά η απόκριση $Y(t)$ λαμβάνει την τελική της τιμή $K_p \alpha$, ονομάζεται χρόνος ανύψωσης, t_r , και υπολογίζεται από την εξίσωση (6.71) ή (6.72) για $Y(t_r) = K_p \alpha$ (βλέπε Εικόνα 6.11).

$$t_r = \frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \varphi) \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}(\sqrt{1-\zeta^2} / \zeta) \quad (6.73)$$

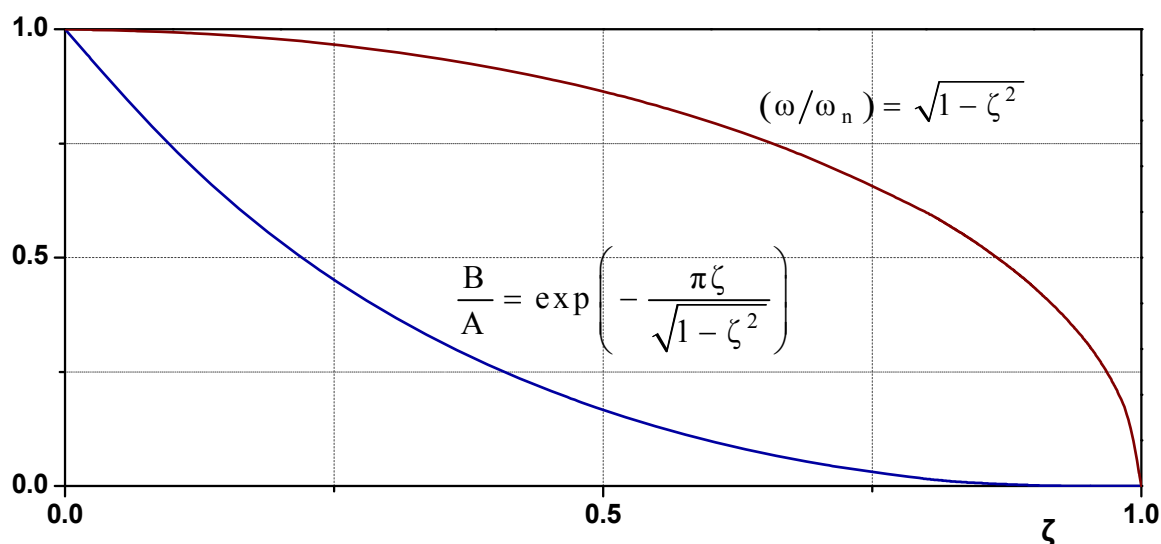
Υπέρβαση (overshoot): Ο λόγος (B/A) ονομάζεται υπέρβαση και υπολογίζεται από την εξίσωση (6.71) ή (6.72), στη χρονική στιγμή $t_p = (\pi/\omega)$, που αντιστοιχεί στο πρώτο μέγιστο της $Y(t)$.

$$\frac{B}{A} = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (6.74)$$

Λόγος ελάττωσης των ταλαντώσεων (decay ratio): Ο λόγος (C/B) ονομάζεται λόγος ελάττωσης των ταλαντώσεων και υπολογίζεται από την εξίσωση (6.71) ή (6.72) για τις χρονικές στιγμές (π/ω) και $(3\pi/\omega)$.

$$\frac{C}{B} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = (\text{Υπέρβαση})^2 \quad (6.75)$$

Χρόνος αποκατάστασης (settling time): Ο χρόνος t_s , στον οποίο η διαφορά της αποσβεσμένης ταλαντωτικής απόκρισης, $Y(t)$, από την τελική τιμή της, $K_p a$, γίνεται μικρότερη μιας καθορισμένης τιμής (π.χ., $\pm 2\%$ της τελικής τιμής $K_p a$), ονομάζεται χρόνος αποκατάστασης της μόνιμης απόκρισης. Εάν η ζώνη διακύμανσης είναι ίση με



Εικόνα 6.12: Μεταβολή των λόγων (B/A) και (ω/ω_n) συναρτήσει του συντελεστή απόσβεσης, ζ .

$\pm 2\%$, αποδεικνύεται ότι ο χρόνος αποκατάστασης θα είναι περίπου ίσος με τέσσερις φορές τη φαινομενική χρονική σταθερά του δυναμικού συστήματος:

$$t_s \approx 4\tau_\alpha = 4(\tau/\zeta) \quad (6.76)$$

Για $\zeta = 0$, η χρονική απόκριση του δυναμικού συστήματος θα είναι περιοδική. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα θα έχει δύο καθαρά φανταστικές ρίζες και η **φυσική γωνιακή συχνότητα** της περιοδικής, ημιτονοειδούς απόκρισης $Y(t)$ θα είναι ίση με $\omega_n = 1/\tau$.

Οι γραφικές παραστάσεις της υπέρβασης (εξίσωση (6.74)) και του λόγου (ω/ω_n) παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.12. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του συντελεστή απόσβεσης ζ , ο λόγος (B/A) ελαττώνεται.

Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (6.68) και η γραφική παράσταση της $Y(t)$ μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.

```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter6\Section6_3_2.m
File Edit Text Desktop Window Help
1 % Ενότητα 6.3.2: Απόκριση Συστήματος 2ης Τάξης σε Βηματική Μεταβολή
2
3 Kp = 1; % ορισμός της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας
4 T = 1; % ορισμός της χρονικής σταθεράς της διεργασίας
5 z = 0.2; % ορισμός του συντελεστή απόσβεσης
6 % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας
7 sys = tf([Kp],[T^2 2*z*T 1]);
8 a = 3; % μέγεθος της βηματικής μεταβολής -U(s)=a*H(t)
9 [y,t] = step(sys*a); % υπολογισμός απόκρισης βηματικής μεταβολής
10 Yd = y / (Kp*a); % υπολογισμός αδιάστατης απόκρισης
11 td = t/T; % υπολογισμός αδιάστατου χρόνου
12 plot(td,Yd,'k-') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
13 grid on % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
14 % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
15 xlabel(['A\delta\iotaota\alpha\sigmama\tau\alpha\alpha\tau\alpha\varsigma\sigmama '...
16 '\chi\rho\o\mu\varsigma\sigmama, t/\tau'])
17 % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
18 ylabel('Y(t)/(Kp*\alpha)')
19 % εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
20 title(['A\delta\iotaota\alpha\sigmama\tau\alpha\alpha\tau\alpha\eta\eta\alpha \alpha\pi\alpha\pi\iota\o '...
21 '\kappa\rho\iota\sigmama\eta\eta\sigmama\epsilon\p\si\l\o\n B\eta\mu\alpha '...
22 '\tau\iota\o\kappa\p\alpha\eta\eta M\epsilon\p\si\l\o\n\tau\alpha\alpha\beta\eta\alpha\lambda\lambda\eta\eta\eta'])
script Ln 22 Col 65 OVR

```

Παράδειγμα 6.2: Απόδειξη των εξισώσεων (6.71)-(6.76)

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s)$$

Να αποδείξετε με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside ότι η χρονική απόκριση $Y(t)$ του συστήματος σε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή της μεταβλητής εισόδου $U(s) = 1/s$, δίνεται από την εξίσωση (6.71) ή την ισοδύναμη διατύπωσή της (6.72). Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ανύψωσης, t_r , δίνεται από την εξίσωση (6.73). Επίσης, να αποδείξετε ότι ο χρόνος t_p , στον οποίο εμφανίζεται το πρώτο μέγιστο της χρονικής απόκρισης της $Y(t)$, ισούται με $t_p = \pi/(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})$, η δε μέγιστη τιμή της $Y(t_p)$ είναι ίση με $Y(t_p) = 1 + \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$. Ακολούθως, να αποδείξετε ότι η υπέρβαση (B/A) δίνεται από τη σχέση (6.74). Τέλος να αποδείξετε, εάν η ζώνη διακύμανσης είναι ίση με $\pm 2\%$ της τελικής τιμής K_p α της $Y(t)$, ο τελικός χρόνος αποκατάστασης θα δίνεται από την εξίσωση (6.76).

Λύση:

Η φυσική γωνιακή συχνότητα, ω_n , είναι ίση με $1/\tau$, όπου τ είναι η φυσική περίοδος της διεργασίας. Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας γράφεται:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} U(s) \quad (i)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (i) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (6.4) για $K_p = 1$. Θεωρούμε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου. Για $0 < \zeta < 1$, η εξίσωση (i) γράφεται:

$$Y(s) = \frac{1/\tau^2}{s[(s + \zeta/\tau)^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}/\tau)^2]} \quad (ii)$$

Δηλαδή, η $Y(s)$ θα έχει μια ρίζα στη θέση $s = 0$ και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος, $-\zeta/\tau \pm i(\sqrt{1-\zeta^2}/\tau)$. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα Heaviside, η χρονική απόκριση της $Y(t)$ θα δίνεται από την εξίσωση (iii).

$$Y(t) = Y_o(t) + Y(t)_{-\zeta/\tau \pm i\sqrt{1-\zeta^2}/\tau} \quad (iii)$$

Η συνεισφορά της ρίζας $s = 0$ στην εξίσωση (iii) υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside (βλέπε εξίσωση (A.70)).

$$Y_0(t) = Y(s)|_{s=0} = \frac{1/\tau^2}{s[(s + \zeta/\tau)^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}/\tau)^2]} \Big|_{s=0} = 1 \quad (\text{iv})$$

Η συνεισφορά του ζεύγους των συζυγών μιγαδικών ριζών στην εξίσωση (iii) υπολογίζεται από τις εξισώσεις (A.73) – A.74) (βλέπε Παράρτημα Α).

$$Y_{-\alpha \pm i\beta}(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\beta} (\psi_i \cos \beta t + \psi_r \sin \beta t) \quad (\text{v})$$

όπου $\alpha = \zeta/\tau$, $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}/\tau$. ψ_r και ψ_i είναι το πραγματικό και φαντασικό μέρος της $\Psi(s) = (\tau^{-2}/s)$ για $s = -\alpha + i\beta$. Συνεπώς,

$$\Psi(s)|_{-\alpha+i\beta} = \frac{1/\tau^2}{s} \Big|_{-\alpha+i\beta} = -\frac{\zeta}{\tau} - i \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \quad (\text{vi})$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των εξισώσεων (iv)-(vi) στην εξίσωση (iii), τελικά λαμβάνουμε:

$$Y(t) = 1 - e^{-\zeta t/\tau} \left[\cos(\omega t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t) \right], \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \quad (\text{vii})$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας (5.55), η εξίσωση (vii) γράφεται:

$$Y(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{\zeta t}{\tau}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta) \quad (\text{viii})$$

Ακολούθως, από την εξίσωση (viii) υπολογίζουμε το χρόνο ανύψωσης t_r , στον οποίο η τιμή της $Y(t)$, για πρώτη φορά, γίνεται ίση με $Y(t_r) = K_p \alpha = 1$.

$$Y(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta t_r/\tau}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t_r + \varphi) \quad \text{ή} \quad \sin(\omega t_r + \varphi) = 0 \quad (\text{ix})$$

Επίσης, από την εξίσωση (ix) υπολογίζουμε όλους τους χρόνους στους οποίους η $Y(t)$ λαμβάνει διαδοχικά την τιμή $Y(t_r) = K_p \alpha = 1$ (βλέπε Εικόνα 6.11):

$$\omega t_r + \varphi = k\pi \quad \text{ή} \quad t_r = \frac{(k\pi - \varphi)}{\omega}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{x})$$

Έτσι, από την εξίσωση (x) και για $k = 1$, υπολογίζουμε τον πρώτο χρόνο ανύψωσης, t_r :

$$t_r = \frac{(\pi - \varphi)}{\omega} = \frac{(\pi - \varphi)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\tau(\pi - \varphi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{xi})$$

Για να υπολογίσουμε το χρόνο t_p στον οποίο η $Y(t)$ εμφανίζει το πρώτο της μέγιστο, παραγωγίζουμε την εξίσωση (vii) ή (viii) ως προς t και εξισώνουμε το τελικό αποτέλεσμα με μηδέν.

$$\frac{dY}{dt} = 0 = \sin(\omega t) \frac{e^{-\zeta t/\tau}}{\tau \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{ή} \quad \sin(\omega t) = 0, \quad \omega = \sqrt{1 - \zeta^2} / \tau \quad (\text{xii})$$

Ακολουθώντας, από την εξίσωση (xii), υπολογίζουμε τους χρόνους $(k\pi/\omega)$, όπου $k=0,1,2,3,\dots$, που αντιστοιχούν στα διαδοχικά ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) της $Y(t)$. Συνεπώς, για $k = 1$ υπολογίζεται ο χρόνος στον οποίο εμφανίζεται το πρώτο μέγιστο της χρονικής απόκρισης $Y(t)$, δηλαδή

$$t_p = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{xiii})$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την τιμή του t_p στην εξίσωση (vii), λαμβάνουμε:

$$Y(t_p) = 1 - e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) = 1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{xiv})$$

Ο λόγος (B/A) , υπολογίζεται εύκολα από την εξίσωση (xiv), λαμβάνοντας υπόψη ότι $Y(t_p) = A(1+B) = A(1 + \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}))$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, $A = K_p \alpha = 1$.

Έτσι, προκύπτει η ακόλουθη σχέση για την υπέρβαση:

$$(B/A) = \exp\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι εξισώσεις $1 \pm e^{-\zeta t/\tau} / \sqrt{1 - \zeta^2}$ προσδιορίζουν τις δύο

εκθετικές καμπύλες των ακρότατων (π.χ., των διαδοχικών μεγίστων και ελαχίστων) της αποσβεσμένης ταλαντωτικής απόκρισης της $Y(t)$ (βλέπε Εικόνα 6.11). Συνεπώς, ο τελικός χρόνος αποκατάστασης της νέας ισορροπίας, t_s , εάν η ζώνη διακύμανσης είναι ίση με $\pm 2\%$ της τελικής τιμής της $Y(t)$ ($= K_p \alpha = 1$), θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Y(t_s) = 1,02 = 1 + e^{-\zeta t_s / \tau} / \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{xv})$$

Γενικά, η ταχύτητα με την οποία αποσβένεται το πλάτος ταλάντωσης της ημιτονοειδούς απόκρισης της $Y(t)$ θα εξαρτάται από την τιμή της φαινομενικής χρονικής σταθεράς, $\tau_a = (\tau/\zeta) = (1/\zeta\omega_n)$ του δυναμικού συστήματος. Έτσι, εάν γνωρίζουμε τις τιμές των ζ και τ , από την εξίσωση (xv) μπορούμε να υπολογίσουμε τον χρόνο t_s , που απαιτείται για την αποκατάσταση της νέας ισορροπίας. Έτσι, εάν η ζώνη διακύμανσης είναι ίση με $\pm 2\%$ της τελικής τιμής της $Y(t_s)$ και $0 < \zeta < 0,9$, ο χρόνος t_s θα είναι περίπου ίσος με τέσσερις φορές τη φαινομενική χρονική σταθερά του δυναμικού συστήματος. Δηλαδή, $t_s \approx 4\tau_a = 4(\tau/\zeta)$.

Παράδειγμα 6.3: Υπολογισμός της υποαποσβεσμένης απόκρισης δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης:

$$Y(s) = \frac{1}{8s^2 + 4s + 2} U(s)$$

Να δείξετε ότι η χρονική απόκριση του συστήματος είναι υποαποσβεσμένη. Για μια βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου $U(t) = 2H(t)$, να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση $Y(t)$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace. Ποια είναι η τιμή της υπέρβασης;

Λύση:

Σύμφωνα με την εξίσωση (6.5), η συνάρτηση μεταφοράς του δυναμικού συστήματος γράφεται:

$$Y(s) = \frac{0,5}{4s^2 + 2s + 1} U(s) \quad (\text{i})$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (i) με την εξίσωση (6.5) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις παραμέτρους τ και ζ .

$$\tau^2 = 4 \quad \text{και} \quad \zeta = 2/2\tau = 0,5 \quad (\text{ii})$$

Συνεπώς, η χρονική απόκριση της διεργασίας θα είναι υποαποσβεσμένη γιατί $\zeta=0,5$. Ακολουθώντας, από την εξίσωση (i) και για τη βηματική μεταβολή της μεταβλητής εισόδου, $U(s)=2/s$, υπολογίζουμε την $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{0,5 \cdot 2}{s(4s^2 + 2s + 1)} = \frac{0,25}{s((s + 0,25)^2 + 0,433^2)} \quad (\text{iii})$$

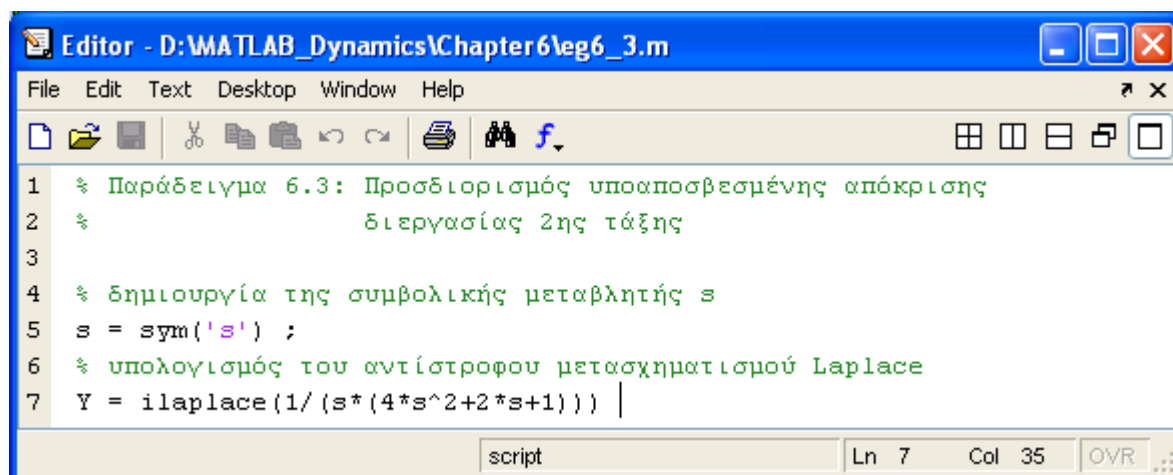
Οι ρίζες/ πόλοι της $Y(s)$ είναι: $s_1 = 0$, s_2 και $s_3 = -0,25 \pm i0,433$. Συνεπώς, ακολουθώντας την ανάλυση του παραδείγματος 6.2, υπολογίζουμε εύκολα, με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside, τη χρονική απόκριση της $Y(t)$.

$$Y(t) = 1 - e^{-0,25t} (\cos(0,433t) + 0,577\sin(0,433t)) \quad (\text{iv})$$

Τέλος, από την εξίσωση (6.74) υπολογίζουμε την τιμή της υπέρβασης (B/A).

$$(B/A) = \exp\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right) = 0,163 \quad (\text{v})$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της εξίσωσης (iii) μπορεί να επαληθευτεί με τη βοήθεια του ακόλουθου προγράμματος σε MATLAB.



```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter6\leg6_3.m
File Edit Text Desktop Window Help
1  % Παράδειγμα 6.3: Προσδιορισμός υποαποσβεσμένης απόκρισης
2  %           διεργασίας 2ης τάξης
3
4  % δημιουργία της συμβολικής μεταβλητής s
5  s = sym('s') ;
6  % υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace
7  Y = ilaplace(1/(s*(4*s^2+2*s+1))) |
script Ln 7 Col 35 OVR

```

6.3.3 Απόκριση Συστήματος Δεύτερης Τάξης σε Ημιτονοειδή Μεταβολή

Για να υπολογίσουμε τη μόνιμη απόκριση, $Y_s(t)$, μιας διεργασίας δεύτερης τάξης σε μια ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου, αρχικά προσδιορίζουμε τη μιγαδική

συνάρτηση $G(i\omega)$. Για το σκοπό αυτό, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή Laplace s στην εξίσωση (6.5) με $i\omega$.

$$G(i\omega) = G(s)\Big|_{s=i\omega} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}\Big|_{s=i\omega} = \frac{K_p}{1 - \tau^2\omega^2 + 2\zeta\tau i\omega} \quad (6.77)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της εξίσωσης (6.77) με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή $(1 - \tau^2\omega^2 - 2\zeta\tau i\omega)$. Έτσι, η εξίσωση (6.77) γίνεται:

$$G(i\omega) = K_p \frac{(1 - \tau^2\omega^2) - i(2\zeta\tau\omega)}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2} \quad (6.78)$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε το μέτρο και το όρισμα της μιγαδικής συνάρτησης $G(i\omega)$ (βλέπε επίσης ενότητα 5.3.3).

$$|G(i\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}} \quad (6.79)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}\right) \quad (6.80)$$

Συνεπώς, η μόνιμη απόκριση $Y_s(t)$ της διεργασίας δεύτερης τάξης σε ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$Y_s(t) = |G(i\omega)|\alpha \sin(\omega t + \varphi) = \frac{K_p\alpha}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.81)$$

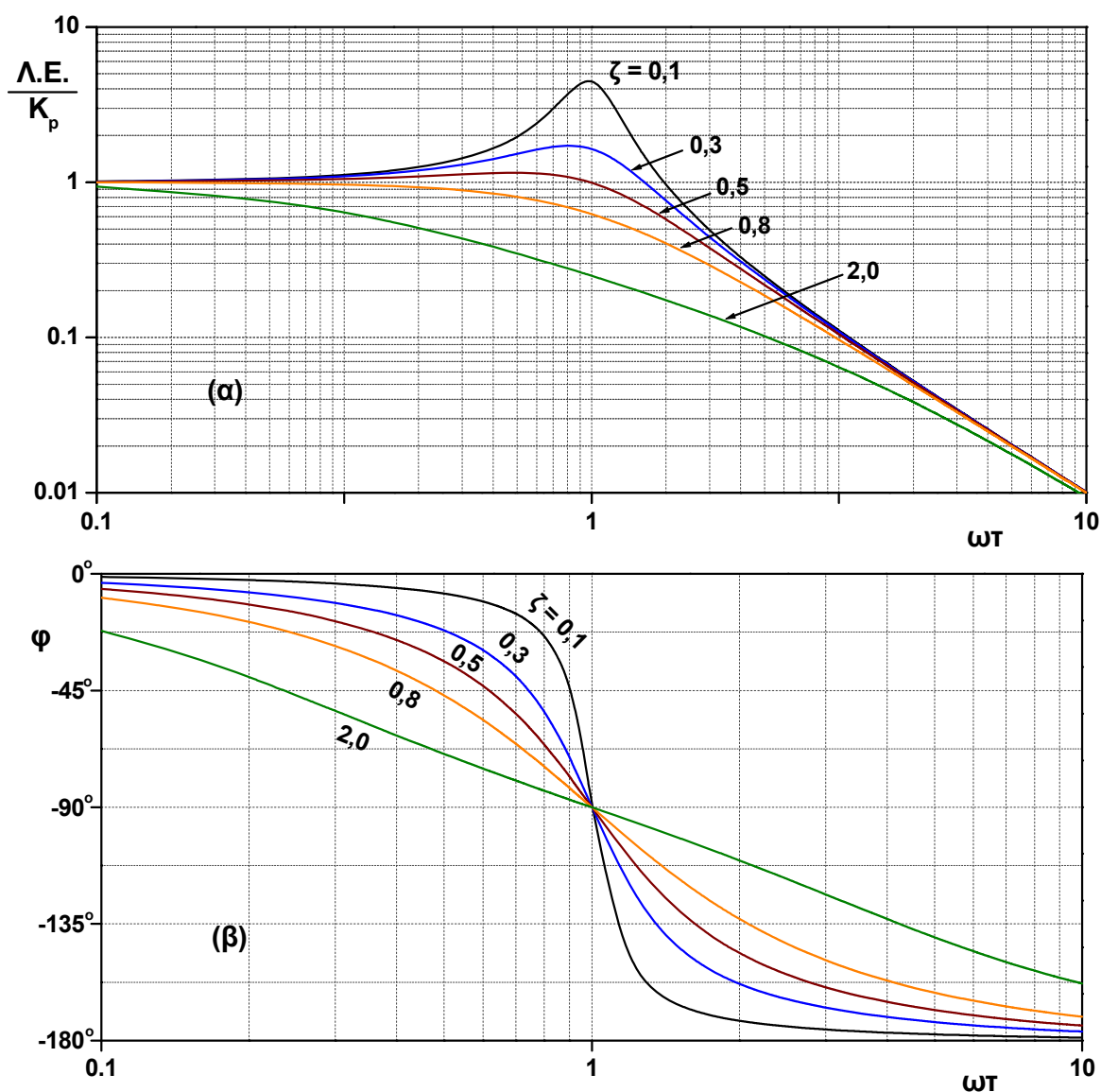
Από την εξίσωση (6.81) παρατηρούμε ότι:

1. Η μόνιμη απόκριση διεργασίας δεύτερης τάξης σε ημιτονοειδή μεταβολή ($U(t) = \alpha \sin \omega t$), είναι επίσης ημιτονοειδής, η δε γωνιακή συχνότητά της είναι ίση με εκείνη του σήματος εισόδου.
2. Ο λόγος του εύρους του σήματος εξόδου, α' , προς το εύρος του σήματος εισόδου, α , είναι:

$$(\Lambda.Ε.) = \frac{\alpha'}{\alpha} = |G(i\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}} \quad (6.82)$$

3. Η απόκριση $Y_s(t)$ έπεται (καθυστερεί) του σήματος εισόδου $U(t)$ κατά γωνία φ , που υπολογίζεται από την εξίσωση (6.80).

Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων (6.79) και (6.80) συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας ω συνθέτουν το γνωστό διάγραμμα του BODE, που παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.13 για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης, ζ . Συχνά, αντί για τις



Εικόνα 6.13: Διάγραμμα BODE δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης (α) Μεταβολή του λόγου $(\Lambda.Ε./K_p)$ συναρτήσει του $\omega\tau$, (β) Μεταβολή της γωνίας φ συναρτήσει του $\omega\tau$.

λεπτομερείς γραφικές παραστάσεις των $(\Lambda.E/K_p)$ και φ συναρτήσεων του ω , σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές μεταβολές τους ως προς το ω . Για το σκοπό αυτό, παίρνουμε λογαρίθμους στην εξίσωση (6.82).

$$\log\left(\frac{\Lambda.E.}{K_p}\right) = -\frac{1}{2} \log[(1 - \omega^2 \tau^2)^2 + (2\zeta\omega\tau)^2] \quad (6.83)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6.83) θα έχει δύο ασύμπτωτες. Η πρώτη θα έχει κλίση ίση με το μηδέν και προκύπτει από την εξίσωση (6.83) για $\omega\tau \rightarrow 0$. Η δε δεύτερη ασύμπτωτος θα έχει κλίση ίση με μείον δύο και θα ισχύει για μεγάλες τιμές του $\omega\tau \gg 1$.

$$\lim_{\omega\tau \rightarrow 0} \log\left(\frac{\Lambda.E.}{K_p}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\omega\tau \rightarrow \infty} \log\left(\frac{\Lambda.E.}{K_p}\right) = -2 \log(\omega\tau) \quad (6.84)$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι οι δύο ασύμπτωτες θα τέμνονται στη γωνιακή συχνότητα $\omega_c = 1/\tau$. Ακολούθως, με τη βοήθεια της εξίσωσης (6.80), αναλύουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της γωνίας καθυστέρησης, φ .

$$\begin{aligned} \text{Για} \quad \omega\tau \rightarrow 0 & \quad , \quad \tan\varphi \approx -2\zeta\omega\tau \quad , \quad \varphi \rightarrow 0 \\ \omega\tau = 1 & \quad , \quad \tan\varphi = -\infty \quad , \quad \varphi \rightarrow -90^\circ \\ \omega\tau > 1 \text{ και } \omega\tau \rightarrow \infty & \quad , \quad \tan\varphi \approx \left(\frac{2\zeta}{\omega\tau}\right) \quad , \quad \varphi \rightarrow -180^\circ \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η γωνία καθυστέρησης για συστήματα δεύτερης τάξης μεταβάλλεται από 0° έως και -180° , καθώς η γωνιακή συχνότητα λαμβάνει τιμές στην περιοχή $(0, \infty)$. Σημειώνεται ότι για συστήματα πρώτης τάξης η γωνία καθυστέρησης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή των 90° .

Επίσης, είδαμε ότι για συστήματα πρώτης τάξης ο λόγος $(\Lambda.E/K_p)$ θα είναι πάντοτε μικρότερος ή ίσος του ένα. Αντίθετα, για συστήματα δεύτερης τάξης και για ορισμένες τιμές του συντελεστή απόσβεσης ζ , η ποσότητα $(\Lambda.E/K_p)$ μπορεί να λάβει τιμές μεγαλύτερες του ένα (βλέπε Εικόνα 6.13). Για να υπολογίσουμε την τιμή του $(\omega\tau)_{\max}$, στην οποία ο λόγος των ευρών εμφανίζει μέγιστο, παραγωγίζουμε την εξίσωση (6.82) ως προς $\omega\tau$ και το αποτέλεσμα που προκύπτει το εξισώνουμε με μηδέν:

$$\frac{d}{d(\omega\tau)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^2 \tau^2)^2 - 2\omega^2 \tau^2 + 4\zeta^2 \omega^2 \tau^2}} \right) = 0 \quad (6.85)$$

Ακολουθώντας, από την επίλυση της εξίσωσης (6.85) υπολογίζουμε την τιμή του $(\omega\tau)_{\max}$:

$$(\omega\tau)_{\max} = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad , \quad \zeta < 0,707 \quad (6.86)$$

Συνεπώς, για $\zeta < 0,707$ ο λόγος $(\Lambda.E/K_p)$ θα είναι μεγαλύτερος της μονάδας στη γωνιακή συνότητα $(\omega\tau)_{\max}$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (6.86) στην εξίσωση (6.82), λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{\Lambda.E.}{K_p} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6.87)$$

Παρατηρούμε ότι καθώς ο συντελεστής απόσβεσης τείνει στο μηδέν ο λόγος $(\Lambda.E/K_p)$ θα τείνει στο άπειρο.

Η επίλυση της εξίσωσης (6.4) για μία ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου, η γραφική παράσταση της $Y(t)$ και τα αντίστοιχα διαγράμματα BODE μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια των ακόλουθων δύο προγραμμάτων σε MATLAB.


```

Editor - D:\MATLAB_Dynamics\Chapter6\Section6_3_3_BODE.m
File Edit Text Desktop Window Help
[Icons]

1  % Δημιουργία Διαγραμμάτων BODE για Σύστημα 2ης τάξης
2
3  Kp = 17 ;           % ορισμός της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας
4  T = 1 ;            % ορισμός της χρονικής σταθεράς της διεργασίας
5  z = 0.2 ;         % ορισμός του συντελεστή απόσβεσης
6
7  % δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας
8  sys = tf([Kp],[T^2 2*z*T 1]) ;
9  % δημιουργία λογαριθμικού διαστήματος (200 σημεία)
10 w = logspace(log10(10^(-1)/T),log10(10^1/T),200) ;
11 % Υπολογισμός συχνοτικής απόκρισης και αποθήκευση του λ.Ε. στη
12 % θέση 'mag' και της φάσης στην 'phase' (ο)
13 [mag,phase] = bode(sys,w) ;
14 AR = zeros(1,length(mag)) ;
15 for j = 1:1:length(mag)
16     AR(1,j) = mag(:,j) ; % εξαγωγή του λ.Ε. στη μεταβλητή AR
17 end
18 figure(1)           % δημιουργία 1ου διαγράμματος BODE
19 loglog(w*T,AR/Kp,'k-') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
20 ylim([0.01 10])    % καθορισμός ορίων του άξονα y
21 grid on            % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
22 xlabel('\omega\tau') % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
23 ylabel('\Lambda.E. / K_p') % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
24
25 % εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
26 title(['\Lambda\omega\gamma\sigma E\upsilon\omega\tau' ...
27       '\Lambda.E./K_p \sigma\upsilon\omega\tau\alpha\rho\tau\eta\epsilon' ...
28       '\sigma\epsilon\iota\tau\omega\upsilon\omega\tau'])
29
30 phi = zeros(1,length(phase)) ;
31 for i = 1:1:length(phase)
32     phi(1,i) = phase(:,i) ; % εξαγωγή του φ στη μεταβλητή phi
33 end
34 figure(2)           % δημιουργία 2ου διαγράμματος BODE
35 semilogx(w*T,phi,'k-') % σχεδίαση γραφικής παράστασης
36 grid on            % εισαγωγή γραμμών πλέγματος
37 xlabel('\omega\tau') % εισαγωγή τίτλου του άξονα x
38 ylabel('\phi (^o)') % εισαγωγή τίτλου του άξονα y
39
40 % εισαγωγή τίτλου του γραφήματος
41 title(['\Gamma\omega\tau\iota\alpha\kappa\alpha\theta\epsilon\upsilon\omega\tau' ...
42       '\sigma\tau\epsilon\sigma\epsilon\tau\sigma\phi\sigma' ...
43       '\upsilon\omega\tau\epsilon\sigma\epsilon\iota\tau\omega\tau' ...
44       '\upsilon\omega\tau'])

```

script Ln 44 Col 30 OVR

6.3.4 Συχνοτική Ανάλυση Δύο Διεργασιών Πρώτης Τάξης σε Σειρά

Για τιμές του συντελεστή απόσβεσης $\zeta \geq 1$, η συχνοτική απόκριση ενός συστήματος δεύτερης τάξης μπορεί εναλλακτικά να υπολογισθεί από την ισοδύναμη διατύπωση της συνάρτησης μεταφοράς (βλέπε Πίνακα 6.1):

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = \frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (6.88)$$

όπου $\tau_1 = \tau(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$ και $\tau_2 = \tau(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$.

Έτσι, είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο λόγος των ευρών (δηλαδή το μέτρο της μιγαδικής συνάρτησης $G(i\omega)$ ενός δευτεροβάθμιου συστήματος) θα είναι ίσος με το γινόμενο των λόγων των ευρών δύο πρωτοβάθμιων συστημάτων στη σειρά:

$$(\Lambda.E.)_{2ης} = |G(i\omega)|_{2ης} = \frac{K_p}{\sqrt{(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)}} = K_p \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}} \quad (6.89)$$

Παίρνοντας τους λογαρίθμους στην εξίσωση (6.89), λαμβάνουμε:

$$\log(\Lambda.E./K_p)_{2ης} = -\frac{1}{2} \log(1 + \tau_1^2 \omega^2) - \frac{1}{2} \log(1 + \tau_2^2 \omega^2) \quad (6.90)$$

Παρατηρούμε ότι ο λογάριθμος του λόγου των ευρών ($\Lambda.E.$) ενός συστήματος δεύτερης τάξης για $\zeta \geq 1$, ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων των λόγων των ευρών δύο συστημάτων πρώτης τάξης στη σειρά. Το τελευταίο αποτέλεσμα, μπορεί να γενικευθεί και για οποιοδήποτε άλλο δυναμικό σύστημα ($n, 0$)-τάξης, που αποτελείται από μια ακολουθία " n " μη αλληλεπιδρώντων δυναμικών συστημάτων πρώτης τάξης στη σειρά. Δηλαδή, θα ισχύει:

$$\log(\Lambda.E./K_p)_{n-τάξης} = \sum_{i=1}^N \log(\Lambda.E.)_{1ης,i} \quad (6.91)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (6.80), η γωνία καθυστέρησης, φ , ενός συστήματος δεύτερης τάξης θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tan \varphi = \frac{-2\tau\zeta\omega}{(1 - \tau^2\omega^2)} \quad (6.80)$$

Ακολουθώντας, από την εξίσωση (6.23), αντικαθιστούμε τις διατυπώσεις των τ και ζ στην εξίσωση (6.80). Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για τη γωνία φ .

$$\tan \varphi = \frac{-\omega(\tau_1 + \tau_2)}{1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2} = \frac{-(\omega\tau_1) - (\omega\tau_2)}{1 - (-\omega\tau_1)(-\omega\tau_2)} \quad (6.92)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.60), οι γωνίες καθυστέρησης φ_1 και φ_2 των δύο πρωτοβάθμιων συστημάτων θα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\tan\varphi_1 = (-\omega\tau_1) \quad , \quad \tan\varphi_2 = (-\omega\tau_2) \quad (6.93)$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα (6.94),

$$\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = (\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2) / (1 - \tan \varphi_1 \tan \varphi_2) \quad (6.94)$$

και τις εξισώσεις (6.92) και (6.93) προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (6.95)$$

Συνεπώς, η ολική γωνία καθυστέρησης φ ενός δευτεροβάθμιου συστήματος θα είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών φ_1 και φ_2 δύο δυναμικών συστημάτων πρώτης τάξης. Γενικά, για "n" μη αλληλεπιδρώντα συστήματα πρώτης τάξης στη σειρά, θα ισχύει:

$$\varphi_{n\text{-τάξης}} = \sum_{i=1}^N \varphi_{1^{\text{ης}},i} \quad (6.96)$$

Παράδειγμα 6.4: Συχνотική ανάλυση ενός συστήματος δεύτερης τάξης

Να κατασκευάσετε το πλήρες διάγραμμα BODE του ακόλουθου δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)} = \frac{1/5}{(s+1)(s/5+1)} = \frac{1/5}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $\tau_1 = 1$ και $\tau_2 = 1/5$. Έτσι, σύμφωνα με την εξίσωση (6.90), ο λογάριθμος του λόγου των ευρών της διεργασίας δεύτερης τάξης θα δίνεται από το άθροισμα των λογαρίθμων των λόγων των ευρών των δύο συστημάτων πρώτης τάξης:

$$\log(\Lambda.E.)_{2ης} = \log(1/5) - \frac{1}{2} \log(\omega^2 + 1)_{1ης} - \frac{1}{2} \log((\omega/5)^2 + 1)_{1ης} \quad (i)$$

Οι γωνιακές συχνότητες ω_{c_1} και ω_{c_2} , στις οποίες τέμνονται οι αντίστοιχες ασύμπτωτες των δύο επιμέρους συστημάτων πρώτης τάξης, θα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\omega_{c_1} = 1/\tau_1 = 1 \quad \text{και} \quad \omega_{c_2} = 1/\tau_2 = 5$$

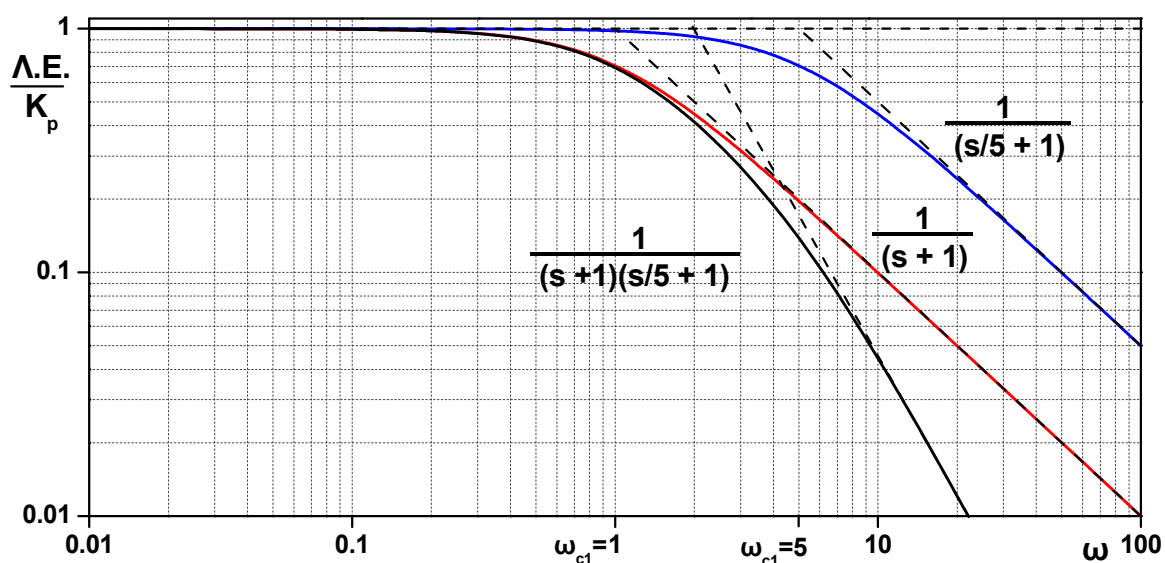
Συνεπώς, για μεγάλες τιμές της γωνιακής συχνότητας (π.χ., $\omega \gg 5$), η εξίσωση (i) γράφεται προσεγγιστικά ως εξής:

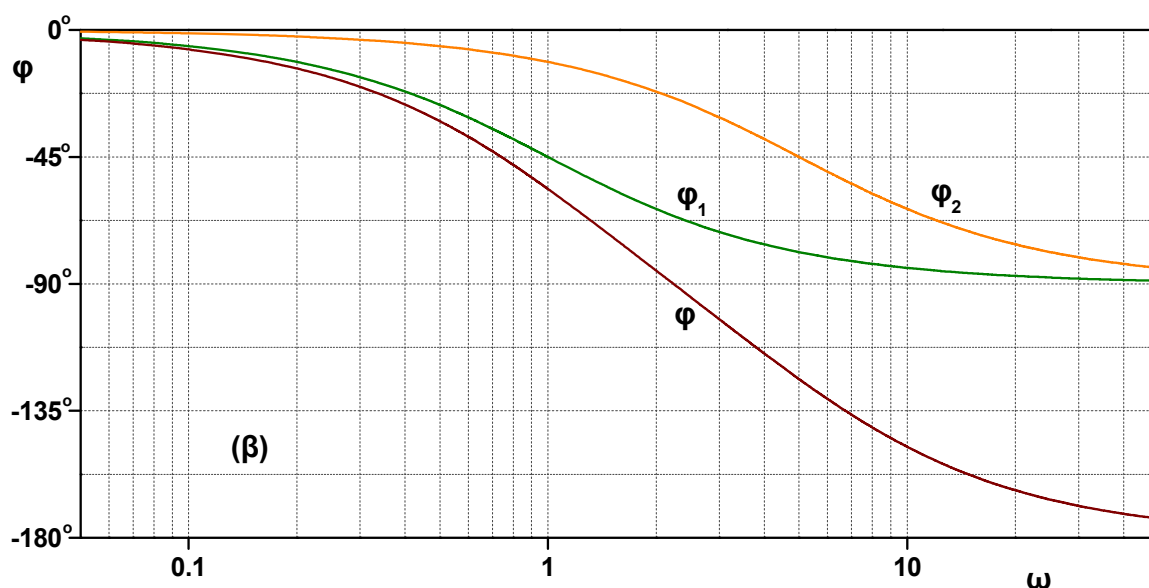
$$\log\left(\frac{\Lambda.E.}{1/5}\right) \approx -2 \log(\omega) \quad (ii)$$

Παρατηρούμε ότι η κλίση της ασυμπτώτου για $\omega \gg 5$ θα είναι ίση με μείον 2. Για να υπολογίσουμε τη συνολική γωνία καθυστέρησης φ του συστήματος δεύτερης τάξης, προσθέτουμε αριθμητικά τις αντίστοιχες γωνίες φ_1 και φ_2 των δύο συστημάτων πρώτης τάξης.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad , \quad \varphi_1 = \tan^{-1}(-\omega) \quad \text{και} \quad \varphi_2 = \tan^{-1}(-\omega/5) \quad (iii)$$

Το πλήρες διάγραμμα BODE του συστήματος δεύτερης τάξης (βλέπε εξισώσεις (i) και (iii)), καθώς επίσης και τα αντίστοιχα διαγράμματα BODE των δύο επιμέρους συστημάτων πρώτης τάξης παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.14.





Εικόνα 6.14: Μεταβολή του λόγου ($\Delta E/K_p$) και της γωνίας φ συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας ω .

6.4 Πειραματικός Προσδιορισμός των Παραμέτρων Δυναμικού Συστήματος Δεύτερης Τάξης

Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων ενός δευτεροβάθμιου δυναμικού συστήματος (π.χ., σταθερά ενίσχυσης, K_p , και χρονικές σταθερές), συχνά χρησιμοποιείται η πειραματικά μετρούμενη χρονική απόκριση του συστήματος σε μια γνωστή βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου. Στη βιβλιογραφία, έχουν προταθεί διάφορες γραφικές μέθοδοι (π.χ., η μέθοδος του Harriot) για τον υπολογισμό των σταθερών (K_p , τ_1 , τ_2 και θ), που εμφανίζονται στη συνάρτηση μεταφοράς (6.97):

$$G(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (6.97)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς (6.97) αναφέρεται σε μια υπεραποσβεσμένη διεργασία δεύτερης τάξης, στην οποία το σήμα εισόδου καθυστερεί του σήματος εξόδου κατά θ χρονικές μονάδες (βλέπε θεώρημα μετατόπισης στο πεδίο του χρόνου στο Παράρτημα Α).

Η χρονική σταθερά θ ονομάζεται **χρονική καθυστέρηση** ή **νεκρός χρόνος** της διεργασίας

(dead time). Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι, στο πεδίο του χρόνου, η συνάρτηση μεταφοράς (6.97) αντιστοιχεί στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dY}{dt} + Y(t) = K_p U(t - \theta) \quad (6.98)$$

Ο Smith ανέπτυξε μια γενική μέθοδο για τον υπολογισμό των παραμέτρων K_p , τ , ζ και θ που εμφανίζονται στη γενική συνάρτηση μεταφοράς (6.99)

$$G(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \quad (6.99)$$

Όπως είναι ήδη γνωστό, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή απόσβεσης ζ , η συνάρτηση μεταφοράς (6.99) θα περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά ενός υπεραποσβεσμένου ($\zeta > 1$) ή ενός υποαποσβεσμένου ($0 < \zeta < 1$) δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης με νεκρό χρόνο, θ .

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι για τον υπολογισμό του νεκρού χρόνου, θ , στις περιπτώσεις (6.97) και (6.99) απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή. Συνήθως, η αρχική τιμή του θ μπορεί προσεγγιστικά να υπολογισθεί από τη γραφική επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων της $Y(t)$ ως προς t , αφού η τιμή της $Y(t)$ θα είναι αρχικά ($0 \leq t < \theta$) ίση με μηδέν. Η ακριβής εκτίμηση της παραμέτρου θ μπορεί να γίνει με τη βοήθεια διαφόρων αριθμητικών μεθόδων εκτίμησης παραμέτρων σε αλγεβρικές ή διαφορικές εξισώσεις (βλέπε Κεφάλαιο 10). Συνήθως, πριν τη γραφική εκτίμηση των παραμέτρων (τ_1 και τ_2) ή (τ και ζ), που εμφανίζονται αντίστοιχα στις συναρτήσεις μεταφοράς (6.97) και (6.99), όλες οι πειραματικές μετρήσεις της $Y(t)$ μετατοπίζονται χρονικά και προς τα αριστερά κατά θ χρονικές μονάδες. Συγκεκριμένα, ορίζεται μια νέα χρονική κλίμακα $t' = (t - \theta)$ και, ακολούθως, γίνεται η αντιστοίχιση όλων των πειραματικών μετρήσεων στη νέα χρονική κλίμακα, δηλαδή $Y(t') = Y(t - \theta)$.

6.4.1 Γραφική Εκτίμηση των Παραμέτρων με τη Μέθοδο του Harriott

Στην Εικόνα 6.15, απεικονίζεται η αδιάστατη απόκριση ($Y(t)/(K_p a)$) μιας υπεραποσβεσμένης διεργασίας ($\zeta \geq 1$) ως προς τον αδιάστατο χρόνο $t/(\tau_1 + \tau_2)$, για διάφορες τιμές του λόγου των δύο χρονικών σταθερών (τ_2/τ_1) (βλέπε εξίσωση (6.98) για $\theta=0$).

Παρατηρούμε ότι για $\tau_2/\tau_1=0$, η χρονική απόκριση αντιστοιχεί σε μία διεργασία πρώτης τάξης. Για $\tau_2/\tau_1=1$, η χρονική απόκριση αντιστοιχεί σε μια κρίσιμα αποσβεσμένη διεργασία δεύτερης τάξης ($\zeta=1$). Η μεγαλύτερη από τις δύο χρονικές σταθερές, τ_1 , ονομάζεται **κυρίαρχη χρονική σταθερά** (dominant). Σημειώνεται ότι η σιγμοειδής απόκριση γίνεται εντονότερη καθώς ο λόγος των χρονικών σταθερών τ_2/τ_1 πλησιάζει τη μονάδα. Από τη γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης της $(Y(t)/K_p\alpha)$ ως προς τον αδιάστατο χρόνο $t/(\tau_1+\tau_2)$ για τις τρεις τιμές του λόγου τ_2/τ_1 (βλέπε Εικόνα 6.15), προκύπτει ότι οι τρεις καμπύλες τέμνονται περίπου στον ίδιο αδιάστατο χρόνο $t/(\tau_1+\tau_2) \approx 1,3$. Στο σημείο αυτό, η τιμή της αδιάστατης απόκρισης $(Y(t)/K_p\alpha)$ είναι ίση με 0,73. Συνεπώς, εάν γνωρίζουμε την τιμή του χρόνου, t_{73} , στην οποία η τιμή της χρονικής απόκρισης $Y(t)$ γίνεται ίση με το 73% της τελικής τιμής $(Y(t \rightarrow \infty) = K_p\alpha)$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των δύο χρονικών σταθερών από την ακόλουθη σχέση:

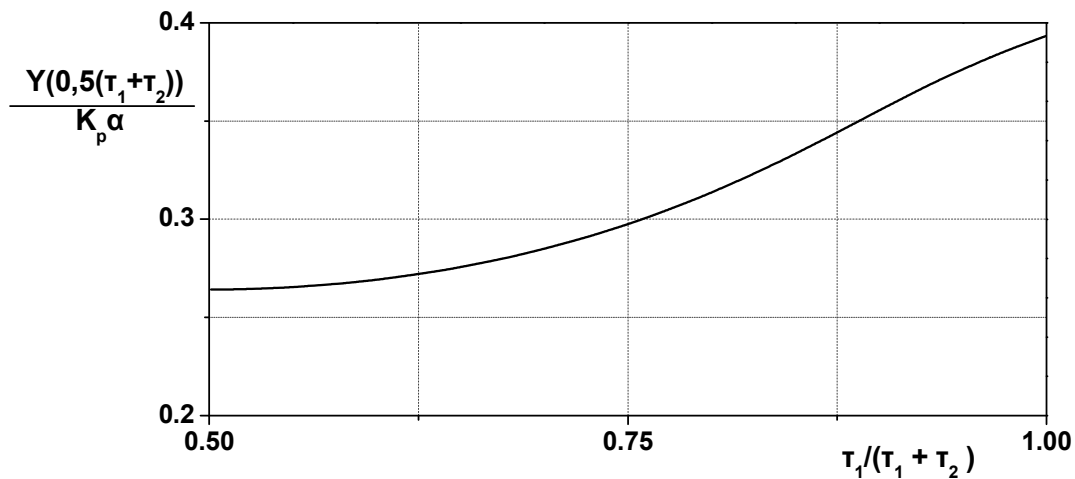
$$(\tau_1 + \tau_2) = t_{73}/1,3 \quad (6.100)$$

Στην Εικόνα 6.16 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της τιμής της αδιάστατης απόκρισης $(Y(t)/K_p\alpha)$ στη χρονική στιγμή $t = 0,5(\tau_1 + \tau_2)$ ως προς την αδιάστατη ποσότητα $\tau_1/(\tau_1 + \tau_2)$. Εάν η τιμή της πειραματικής αδιάστατης απόκρισης είναι μικρότερη του 0,26 ή μεγαλύτερη του 0,39, τότε η μέθοδος του Harriott δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Αυτό σημαίνει ότι η διεργασία δεν είναι υπεραποσβεσμένη ή η δυναμική της συμπεριφορά περιγράφεται από κάποιο άλλο δυναμικό μοντέλο.

Τέλος, σημειώνεται ότι η ακρίβεια της μεθόδου του Harriott μειώνεται καθώς ο λόγος



Εικόνα 6.15: Βηματική απόκριση διεργασίας δεύτερης τάξης ($\zeta \geq 1$) για διάφορες τιμές του λόγου (τ_2/τ_1) .

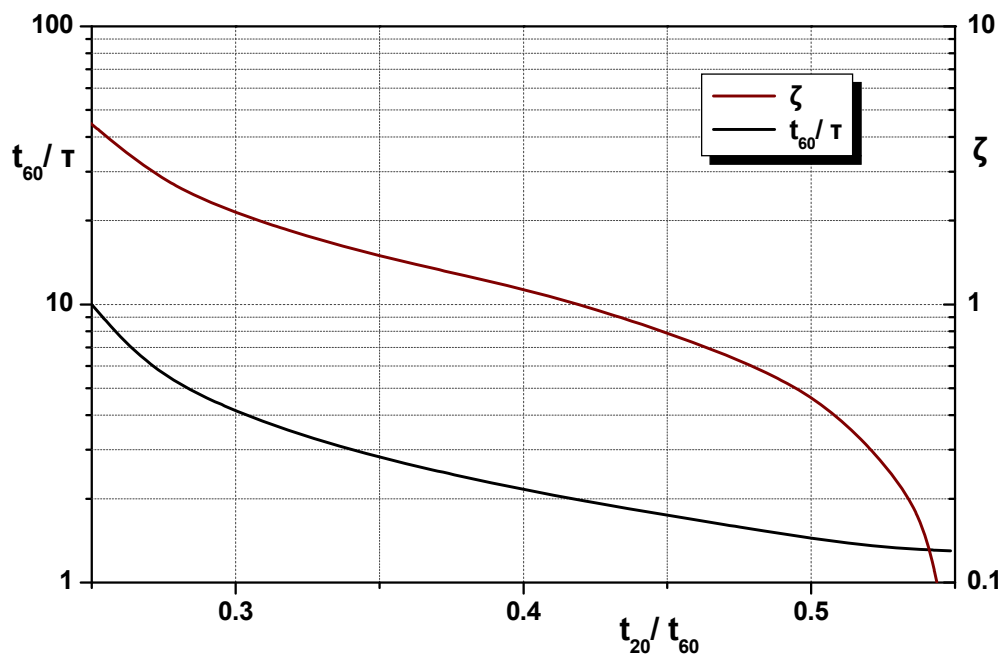


Εικόνα 6.16: Μεταβολή της τιμής της αδιάστατης απόκρισης της $(Y(t)/K_p\alpha)$ στον αδιάστατο χρόνο $t/(\tau_1 + \tau_2) = 0,5$ συναρτήσει του λόγου $\tau_1 / (\tau_1 + \tau_2)$.

(τ_2/τ_1) τείνει προς τη μονάδα. Επίσης, οι εκτιμήσεις των χρονικών σταθερών τ_1 και τ_2 είναι αρκετά ευαίσθητες στην εκτίμηση της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας K_p , που υπολογίζεται από την εξίσωση (5.42).

6.4.2 Γραφική Εκτίμηση των Παραμέτρων με τη Μέθοδο του Smith

Ο Smith χρησιμοποίησε τη γενική συνάρτηση μεταφοράς (6.99) χωρίς χρονική καθυστέρηση (π.χ., $\theta = 0$), για να υπολογίσει την αδιάστατη απόκριση $(Y(t)/(K_p\alpha))$ μιας



Εικόνα 6.17: Εκτίμηση των παραμέτρων τ και ζ με τη μέθοδο του Smith.

διεργασίας δεύτερης τάξης σε μια βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου ($U(t) = \alpha H(t)$) για διάφορες τιμές των τ και ζ .

Ακολούθως, υπολόγισε τους χρόνους t_{20} και t_{60} που αντιστοιχούν στο 20% και 60%, αντίστοιχα, της τελικής τιμής (δηλαδή, $Y(t \rightarrow \infty) = K_p \alpha$) της χρονικής απόκρισης της $Y(t)$. Στην Εικόνα 6.17 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ποσοτήτων t_{60}/τ και ζ ως προς την αδιάστατη ποσότητα t_{20}/t_{60} . Είναι φανερό ότι εάν γνωρίζουμε τις πειραματικές τιμές των t_{20} και t_{60} , εύκολα μπορεί κανείς να προσδιορίσει τις τιμές των τ και ζ από τις γραφικές παραστάσεις της Εικόνας 6.17.

Παράδειγμα 6.5: Εκτίμηση παραμέτρων σε διεργασία δεύτερης τάξης

Στον αντιδραστήρα συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης της Εικόνας 5.9, επιτελείται μια εξώθερμη χημική αντίδραση. Για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της διεργασίας (π.χ., τη σταθερά ενίσχυσης και τις χρονικές σταθερές), η παροχή στην τροφοδοσία του αντιδραστήρα, στη χρονική στιγμή $t = 0$, μεταβάλλεται βηματικά από 120 σε 125 kg/min. Ταυτόχρονα, μετράμε τη χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας στην έξοδο του αντιδραστήρα.

$t(\text{min})$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$T(t) (^{\circ}\text{C})$	140,0	144,0	149,8	154,0	156,7	158,2	159,0	159,5	159,7	159,8	159,9

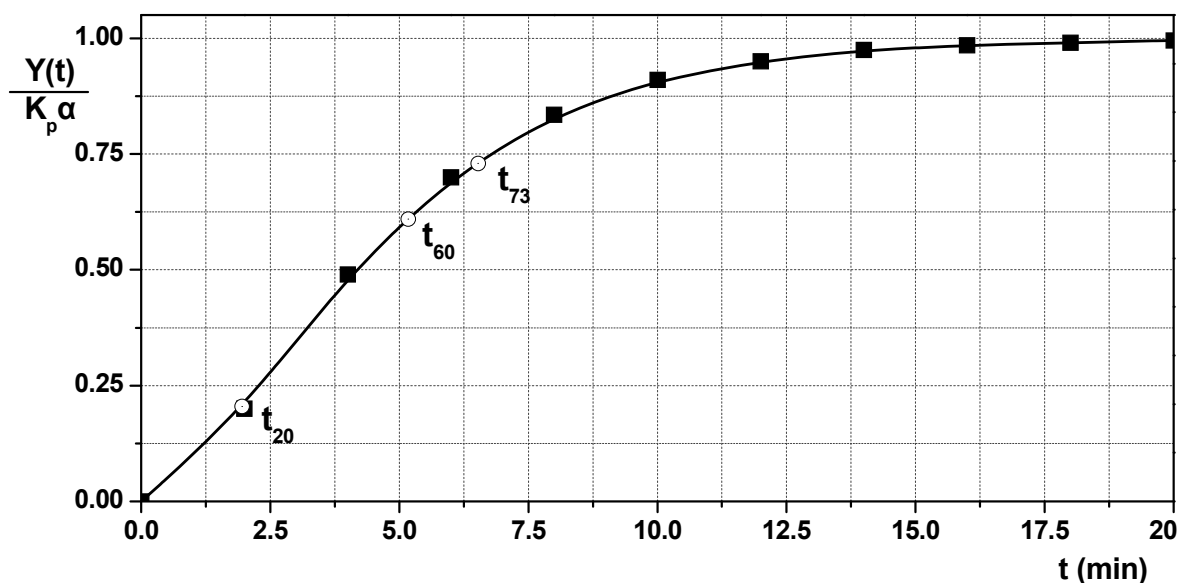
Εάν η τιμή του νεκρού χρόνου είναι ίση με μηδέν, $\theta = 0$, με τη βοήθεια των γραφικών μεθόδων του Harriott και του Smith να υπολογίσετε τις παραμέτρους του δυναμικού μοντέλου της διεργασίας (K_p , τ_1 και τ_2) ή (K_p , τ και ζ).

Λύση:

Από τον ορισμό της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας (βλέπε εξίσωση 5.42) και τα πειραματικά δεδομένα, υπολογίζεται η τιμή της σταθεράς ενίσχυσης της διεργασίας, K_p .

$$K_p = \frac{Y(t \rightarrow \infty)}{U(t \rightarrow \infty)} = \frac{T(\infty) - T(0)}{\dot{m}(\infty) - \dot{m}(0)} = \frac{160 - 140}{125 - 120} = 4 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{kg/min}}$$

Ακολούθως, από τις πειραματικές μετρήσεις της χρονικής μεταβολής της θερμοκρασίας, κάνουμε τη γραφική παράσταση της αδιάστατης απόκρισης της



Εικόνα 6.18: Χρονική μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας (πειραματική).

$Y(t)/(K_p \alpha) = (T(t) - 140)/(4 * 5)$ ως προς το χρόνο t , (βλέπε Εικόνα 6.18). Σύμφωνα με τη μέθοδο του Harriott, αρχικά υπολογίζουμε την τιμή του χρόνου, t_{73} , στον οποίο η αδιάστατη απόκριση είναι ίση με 0,73. Από την Εικόνα 6.18, προκύπτει ότι $t_{73} = 6,4$ min.

Συνεπώς, σύμφωνα με την εξίσωση (6.100), το άθροισμα των δύο χρονικών σταθερών θα είναι ίσο με:

$$(\tau_1 + \tau_2) = \frac{t_{73}}{1,3} = \frac{6,4}{1,3} = 4,92 \quad (\text{i})$$

Στη συνέχεια, για τη χρονική στιγμή $t = 0,5(\tau_1 + \tau_2) = 2,46$ min, υπολογίζουμε από την Εικόνα 6.18 την τιμή της αδιάστατης απόκρισης $Y(2,46)/(K_p \alpha) = 0,27$. Έτσι, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.16 προσδιορίζουμε την αριθμητική τιμή του λόγου $\tau_1/(\tau_1 + \tau_2) = 0,61$.

$$\tau_1 = (\tau_1 + \tau_2) 0,61 \quad (\text{ii})$$

Συνεπώς, από την επίλυση των εξισώσεων (i) και (ii) υπολογίζονται οι τιμές των δύο χρονικών σταθερών $\tau_1 = 3$ min και $\tau_2 = 1,92$ min.

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Smith, αρχικά από την Εικόνα 6.18, υπολογίζουμε τους χρόνους t_{20} και t_{60} που αντιστοιχούν στο 20% και 60% της τελικής τιμής της $Y(t)$, δηλαδή

$t_{20} = 1,9$ και $t_{60} = 4,9$. Ακολούθως, υπολογίζουμε την τιμή του λόγου $t_{20}/t_{60} = 0,38$ και από την Εικόνα 6.17 υπολογίζουμε την τιμή του λόγου $t_{60}/\tau = 2,05$. Άρα, η τιμή της φυσικής περιόδου τ θα είναι ίση με $\tau = 4,9/2,05 = 2,39$ min. Τέλος, από την Εικόνα 6.17 υπολογίζουμε την τιμή του συντελεστή απόσβεσης $\zeta = 1,05$. Επειδή το δυναμικό σύστημα είναι υπεραποσβεσμένο ($\zeta > 1$), μπορούμε να υπολογίσουμε τις δύο χρονικές σταθερές του συστήματος:

$$\tau_1 = \tau (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) = 3,27 \text{ min} \quad ; \quad \tau_2 = \tau (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) = 1,75 \text{ min}$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των χρονικών σταθερών που υπολογίζονται με τη μέθοδο του Smith είναι περίπου ίδιες με εκείνες της μεθόδου του Harriott. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 10, για τον ακριβέστερο υπολογισμό των παραμέτρων ενός δυναμικού μοντέλου είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους μη γραμμικής παλινδρόμησης ή, γενικότερα, μη γραμμικού προγραμματισμού.

Τι πρέπει να γνωρίζω

- ✎ Να διατυπώσετε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος δεύτερης τάξης στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του.
- ✎ Εξηγήστε τη φυσική σημασία των δύο παραμέτρων, τ και ζ , ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης.
- ✎ Να διατυπώσετε τις σχέσεις που συνδέουν τις παραμέτρους τ και ζ ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης ($\zeta \geq 1$), με τις χρονικές σταθερές τ_1 και τ_2 δύο δυναμικών συστημάτων πρώτης τάξης συνδεδεμένων στη σειρά.
- ✎ Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο δύο αλληλεπιδρώντα συστήματα πρώτης τάξης έχουν πιο αργή απόκριση από δύο ισοδύναμα συστήματα που δεν αλληλεπιδρούν.
- ✎ Αποδείξτε τις εξισώσεις (6.63), (6.65) και (6.66) που περιγράφουν τις χρονικές αποκρίσεις συστήματος δεύτερης τάξης σε μοναδιαία παλμική μεταβολή του σήματος εισόδου για τις τρεις περιπτώσεις: $\zeta > 1$, $\zeta = 1$ και $\zeta < 1$.
- ✎ Αποδείξτε τις εξισώσεις (6.69), (6.70) και (6.71) που περιγράφουν τις χρονικές αποκρίσεις συστήματος δεύτερης τάξης σε μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου για τις περιπτώσεις: $\zeta > 1$, $\zeta = 1$ και $\zeta < 1$.
- ✎ Αποδείξτε τις εξισώσεις (6.73)-(6.76) που χαρακτηρίζουν την υποαποσβεσμένη απόκριση ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης.
- ✎ Με τη βοήθεια του θεωρήματος Heaviside, να υπολογίσετε τις χρονικές αποκρίσεις ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης σε μία ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου για τις περιπτώσεις: $\zeta > 1$, $\zeta = 1$ και $\zeta < 1$.
- ✎ Να αποδείξετε, με βάση τις αναλυτικές λύσεις του προηγούμενου ερωτήματος, ότι η μόνιμη απόκριση $Y_s(t)$ του δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης σε ημιτονοειδή μεταβολή του σήματος εισόδου, θα δίνεται από την εξίσωση (6.81), και στις τρεις περιπτώσεις.
- ✎ Να κατασκευάσετε το πλήρες διάγραμμα BODE ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης και να κάνετε την ασυμπτωτική ανάλυση των $(\Lambda.E./K_p)$ και φ συναρτήσει της μεταβολής της γωνιακής συχνότητας $\omega(0, \infty)$.
- ✎ Να περιγράψετε τις μεθόδους των Harriott και Smith που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραμέτρων ενός δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης και να σχολιάσετε τα μειονεκτήματά τους.

Ασκήσεις:

Άσκηση 6.1: Να επιλύσετε στο πεδίο του χρόνου τη διαφορική εξίσωση (6.2) για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- α) Μοναδιαία παλμική μεταβολή του $U(t) = 1\delta(t)$.
- β) Μοναδιαία βηματική μεταβολή του $U(t) = 1H(t)$.
- β) Ημιτονοειδής μεταβολή του $U(t) = 1\sin(\omega t)$.

Άσκηση 6.2: Δίνεται το δυναμικό σύστημα δεύτερης τάξης, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + a \frac{dY}{dt} + 4Y(t) = U(t)$$

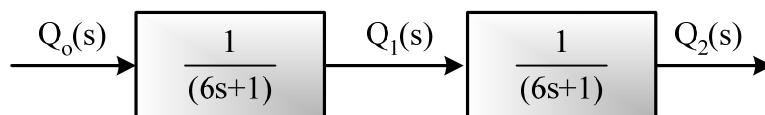
- α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του δυναμικού συστήματος και να διατυπώσετε τις σχέσεις που δίνουν τη σταθερά ενίσχυσης και τη φυσική περίοδο αυτού.
- β) Εάν η αριθμητική τιμή της σταθεράς a μεταβάλλεται στην περιοχή $-10 \leq a \leq 10$, να προσδιορίσετε την υποπεριοχή τιμών του a , στην οποία το δυναμικό σύστημα είναι ασταθές. Να σχολιάσετε ποιοτικά το είδος της απόκρισης του δυναμικού συστήματος (ανεξάρτητα από το είδος μεταβολής της μεταβλητής εισόδου) στην υποπεριοχή τιμών του a , στην οποία το δυναμικό σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση 6.3: Η δυναμική συμπεριφορά μιας φυσικής διεργασίας περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{18}{s^2 + 3s + 9}$$

- α) Για μία βηματική μεταβολή του τύπου: $U(t) = 3H(t)$, να προσδιορίσετε τη χρονική απόκριση $Y(t)$ του δυναμικού συστήματος.
- β) Αν για φυσικούς λόγους απαιτείται να ισχύει $Y(t) \leq 10$, ποια είναι η μέγιστη βηματική μεταβολή της $U(t)$ που μπορούμε να εισάγουμε στο δυναμικό σύστημα χωρίς να υπερβούμε το παραπάνω όριο;

Άσκηση 6.4: Θεωρούμε τη φυσική διεργασία της Εικόνας 6.2, η οποία αποτελείται από δύο μη αλληλεπιδρώντα συστήματα πρώτης τάξης στη σειρά. Το διάγραμμα βαθμίδων της συγκεκριμένης διεργασίας δίνεται στην Εικόνα 6.19.



Εικόνα 6.19: Διάγραμμα βαθμίδων δύο μη αλληλεπιδρώντων συστημάτων πρώτης τάξης στη σειρά.

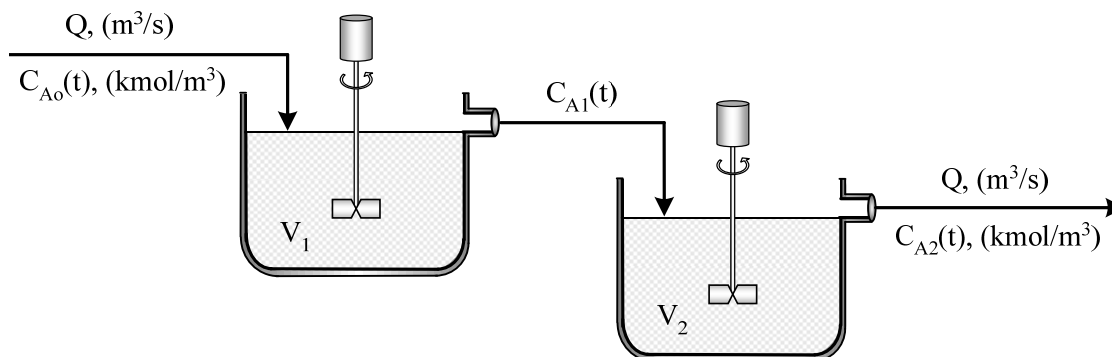
α) Θεωρούμε ότι το δυναμικό σύστημα βρίσκεται αρχικά ($t=0$) σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης, δηλαδή $q_{0s} = q_{1s} = q_{2s} = 0,4 \text{ m}^3/\text{min}$. Να υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή του ρεύματος $q_2(t)$, στην έξοδο της δεύτερης δεξαμενής εάν η ογκομετρική παροχή στην είσοδο της πρώτης δεξαμενής μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο: $q_o(t) = 0,4t$; m^3/min .

β) Εάν τα ρεύματα εκροής $q_1(t)$ και $q_2(t)$ μεταβάλλονται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$q_1(t) = 4h_1(t) \quad ; \quad q_2(t) = 2h_2(t)$$

να προσδιορίσετε τις τελικές τιμές του ύψους του ρευστού στα δύο δοχεία αν, σε χρόνο $t=0$, προσθέσουμε στο πρώτο δοχείο 1 m^3 υγρού.

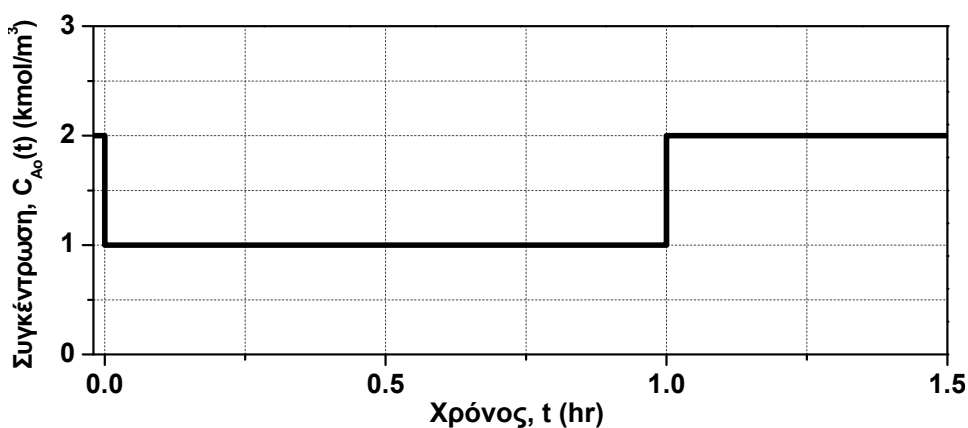
Άσκηση 6.5: Δύο δοχεία συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης συνδέονται στη σειρά όπως φαίνεται στην παρακάτω Εικόνα 6.20:



Εικόνα 6.20: Διάταξη δύο δοχείων συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης.

Τα λειτουργικά και σχεδιαστικά χαρακτηριστικά των δοχείων είναι: $V_1 = V_2 = 5 \text{ m}^3$ (σταθερός), $Q = 2,5 \text{ m}^3/\text{min}$: ογκομετρική παροχή (σταθερή), $C_{A0,s} = 2 \text{ kmol/m}^3$: συγκέντρωση του αντιδραστηρίου A στην είσοδο του πρώτου δοχείου στη μόνιμη κατάσταση, $C_{A1}(t=0) = C_{A2}(t=0) = 2 \text{ kmol/m}^3$: αρχική συγκέντρωση του αντιδραστηρίου A στα δύο δοχεία. Σε χρόνο $t=0$, η συγκέντρωση του αντιδραστηρίου A στην είσοδο της συστοιχίας μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τετραγωνικό βηματικό νόμο που απεικονίζεται στην Εικόνα 6.21.

- Να υπολογίσετε το μέγεθος μιας παλμικής μεταβολής ισοδύναμης με την τετραγωνική-βηματική μεταβολή στη συγκέντρωση του ρεύματος τροφοδοσίας.
- Ποια είναι η χρονική απόκριση της μεταβλητής, $C_{A2}(t)$, στις δύο περιπτώσεις (τετραγωνικής-βηματικής μεταβολής και ισοδύναμης παλμικής μεταβολής);
- Να σχεδιάσετε τη χρονική απόκριση της μεταβλητής, $C_{A2}(t)$, για τις δύο περιπτώσεις.
- Να κατασκευάσετε το πλήρες διάγραμμα BODE του δυναμικού συστήματος.

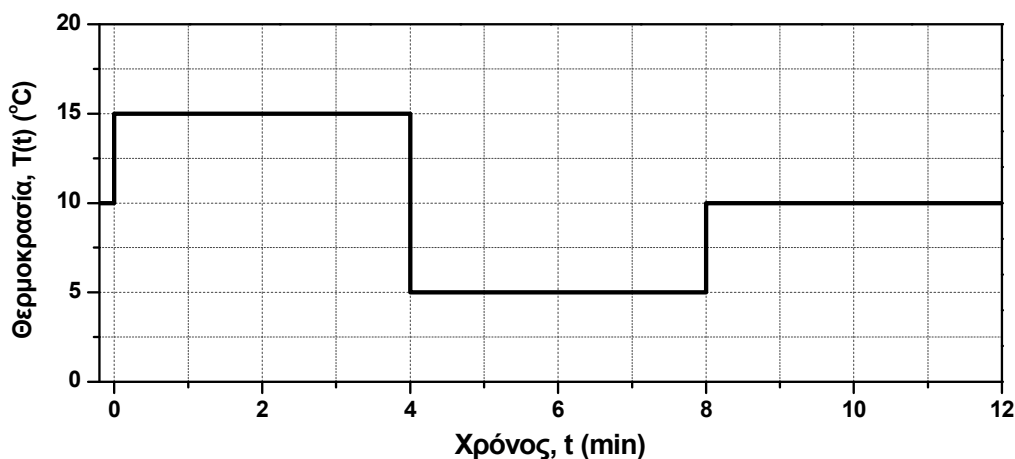


Εικόνα 6.21: Τετραγωνική βηματική μεταβολή της συγκέντρωσης $C_{A0}(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Άσκηση 6.7: Για τη διεργασία που περιγράφεται στην Άσκηση 1.1, δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα: $\dot{m}_0 = 20 \text{ kg/min}$, $M_1 = 60 \text{ kg}$, $M_2 = 40 \text{ kg}$, μέγιστη παροχή ατμού $\dot{m}_{s,\max} = 5 \text{ kg/min}$, ελάχιστη μαζική παροχή ατμού $\dot{m}_{s,\min} = 0$, ειδική θερμότητα νερού $C_p = 1 \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}$. Το θερμικό περιεχόμενο του ατμού είναι $\Delta H_s = 500 \text{ kcal/kg}$. Η

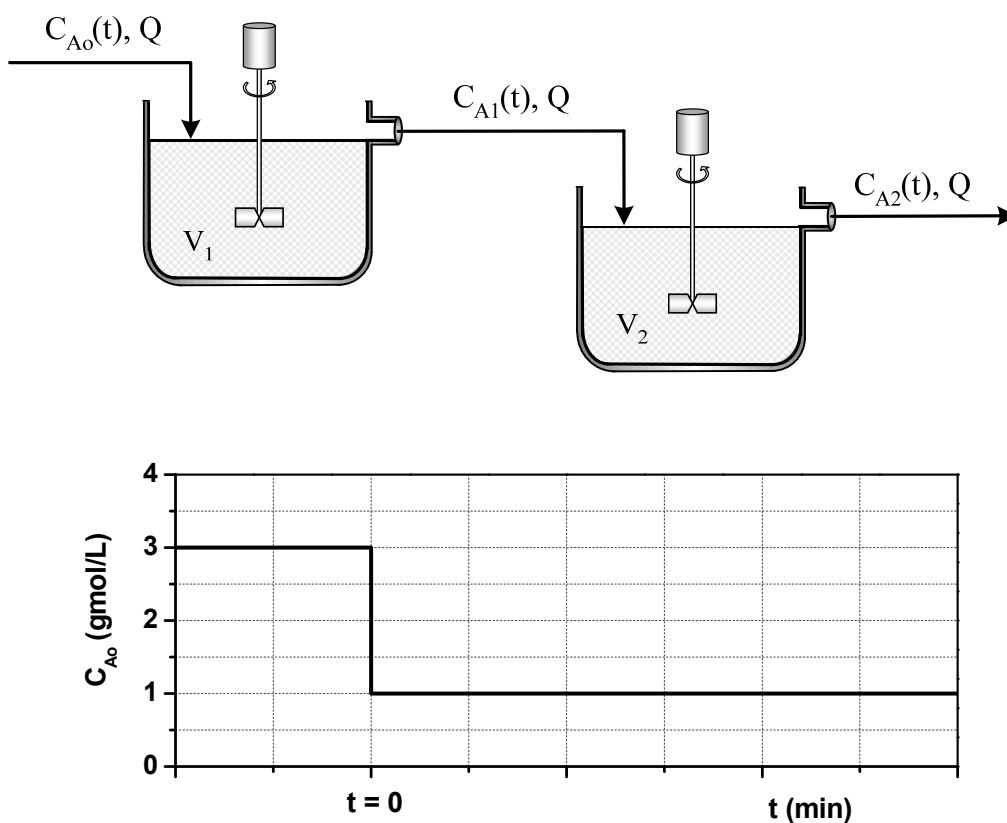
συμπύκνωση του ατμού θεωρείται πλήρης. Θεωρούμε ότι η συνεισφορά της μαζικής παροχής του ατμού ($\dot{m}_s \ll \dot{m}_o$) στο ολικό ισοζύγιο μάζας είναι αμελητέα.

- α) Να αναγράψετε τα δυναμικά ισοζύγια ενέργειας για τη διεργασία και να προσδιορίσετε την τιμή της μαζικής παροχής του ατμού στη μόνιμη κατάσταση, εάν $T_{2s} = 50^\circ\text{C}$ και $T_{os} = 10^\circ\text{C}$.
- β) Να προσδιορίσετε τις επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ των μεταβλητών $T_1(t)$, $\dot{m}_s(t)$ και $T_o(t)$, και μεταξύ των μεταβλητών $T_2(t)$ και $T_1(t)$. Ποια είναι η χρονική σταθερά (-ες) και η ενίσχυση (gain) κάθε επιμέρους διεργασίας;
- γ) Να προσδιορίσετε τις χρονικές αποκρίσεις $T_1(t)$ και $T_2(t)$ εάν $\dot{m}_s(t)$ παραμένει σταθερή και ίση με την τιμή της στη μόνιμη κατάσταση (βλέπε ερώτημα (α)) και η θερμοκρασία $T_o(t)$ μεταβάλλεται σύμφωνα με τον ακόλουθο νόμο (βλέπε Εικόνα 6.22).
- δ) Να προσδιορίσετε τη χρονική απόκριση, $T_2(t)$, για μια βηματική μεταβολή της μαζικής παροχής του ατμού, $\dot{m}_s(t)$, από την αντίστοιχη τιμή της στη μόνιμη κατάσταση σε μια νέα τιμή 2,6 kg/min. Θεωρούμε ότι η θερμοκρασία του ρεύματος εισόδου παραμένει σταθερή, $T_{os} = 10^\circ\text{C}$.



Εικόνα 6.22: Χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας, $T_o(t)$, του ρεύματος εισόδου.

Άσκηση 6.6: (Θέμα εξετάσεων – Μάρτιος 2005) Θεωρούμε ότι η αντίδραση πρώτης τάξης ($A \rightarrow R$) προχωρεί ισοθερμοκρασιακά σε μία συστοιχία δύο αντιδραστήρων συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης (CSTR).



Εικόνα 6.23: Διάταξη αντιδραστήρων συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης.

Η συγκέντρωση του αντιδρώντος A στην είσοδο του αντιδραστήρα για $t < 0$ είναι ίση με 3 gmol/L . Σε χρόνο $t = 0$, η συγκέντρωση του A στην είσοδο αλλάζει σε 1 gmol/L . Δίνονται οι ακόλουθες τιμές των φυσικών και κινητικών παραμέτρων του συστήματος:

$k = 0,2 \text{ min}^{-1}$, σταθερά της ταχύτητας

$\tau_1 = 5 \text{ min}$, μέσος χρόνος παραμονής πρώτου αντιδραστήρα CSTR

$\tau_2 = 10 \text{ min}$, μέσος χρόνος παραμονής δεύτερου αντιδραστήρα CSTR

Η πυκνότητα του αντιδρώντος μίγματος παραμένει σταθερή, όπως επίσης και οι όγκοι V_1 και V_2 του αντιδρώντος μίγματος στους δύο αντιδραστήρες.

- Να αναγραφούν τα δυναμικά ισοζύγια διατήρησης του αριθμού των γραμμομορίων του συστατικού A στους δύο αντιδραστήρες της συστοιχίας.
- Να υπολογιστούν αναλυτικά οι δυναμικές αποκρίσεις $C_{A1}(t)$ και $C_{A2}(t)$. Να γίνει η γραφική τους παράσταση.
- Να υπολογιστούν οι τιμές των C_{A1} και C_{A2} στη νέα μόνιμη κατάσταση και να υπολογιστεί ο χρόνος επίτευξης της νέας μόνιμης κατάστασης.

Άσκηση 6.8: (Θέμα εξετάσεων – Φεβρουάριος 2006) Η δυναμική συμπεριφορά δύο αλληλεπιδρώντων διεργασιών πρώτης-τάξης στη σειρά δίνεται από το ακόλουθο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= a_{11}X_1(t) - a_{12}X_2(t) + bU(t) & X_1(t=0) &= 0 \\ \frac{dX_2}{dt} &= a_{21}X_1(t) - a_{22}X_2(t) & X_2(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι δύο παραπάνω διαφορικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν υπό την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\beta_2 \frac{d^2X_2}{dt^2} + \beta_1 \frac{dX_2}{dt} + \beta_0 X_2(t) = KU(t)$$

και να εκφράσετε τις παραμέτρους β_2 , β_1 , β_0 και K συναρτήσει των σταθερών συντελεστών, a_{ij} και b , του συστήματος των δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

- β) Εάν $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3,5$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$ και $b = 0,5$, να υπολογίσετε την απόκριση της διεργασίας δεύτερης τάξης σε μια μοναδιαία βηματική μεταβολή του σήματος εισόδου. Πώς χαρακτηρίζεται η χρονική απόκριση του δυναμικού συστήματος (π.χ., υπεραποσβεσμένη, κλπ.);

Άσκηση 6.9: Το δυναμικό ισοζύγιο δυνάμεων που ασκούνται σε ένα μανόμετρο υδραργύρου δίνεται την ακόλουθη εξίσωση:

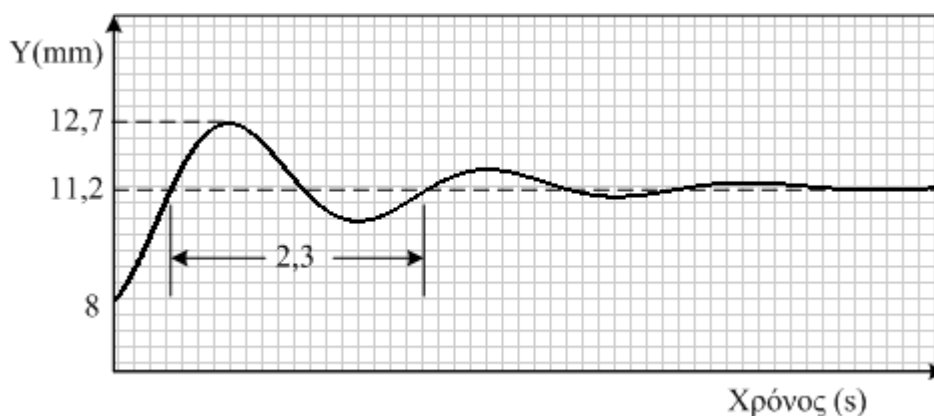
$$4 \frac{d^2h}{dt^2} + 0,8 \frac{dh}{dt} + h(t) = P(t)$$

όπου $h(t)$ είναι η χρονική μετατόπιση της στήλης υδραργύρου από τη θέση ισορροπίας και $P(t)$ είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση που ασκείται στο μανόμετρο.

- α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς που συνδέει τις μεταβλητές $h(t)$ και $P(t)$, θεωρώντας ότι το δυναμικό σύστημα βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας.
- β) Ποιά εκτίμηση μπορούμε να κάνουμε σχετικά με τη χρονική απόκριση του μανομέτρου και τα χαρακτηριστικά απόσβεσης του δυναμικού συστήματος;

- γ) Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση του μανομέτρου, $h(t)$, σε μια χρονική μεταβολή της πίεσης, $P(t) = 2 \exp(-4t)$.

Άσκηση 6.10: Η απόκριση ενός μετρητικού οργάνου πίεσης σε μία βηματική μεταβολή της πραγματικής πίεσης από 15 σε 31 psi περιγράφεται στην Εικόνα 6.24.



Εικόνα 6.24: Χρονική απόκριση ενός μετρητικού οργάνου πίεσης.

- α) Θεωρώντας ότι το σύστημα ακολουθεί δυναμική συμπεριφορά συστήματος δεύτερης τάξης, να υπολογίσετε όλες τις χαρακτηριστικές παραμέτρους του δυναμικού συστήματος:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta + 1}$$

όπου Y (mm) είναι η μεταβλητή απόκλισης του σήματος εξόδου του οργάνου και P (psi) είναι η μεταβλητή απόκλισης της πραγματικής πίεσης.

- β) Να διατυπώσετε το ισοδύναμο μοντέλο του δυναμικού συστήματος στο πεδίο του χρόνου, ως προς τις μεταβλητές $y(t)$ και $p(t)$.

Άσκηση 6.11: (Θέμα εξετάσεων – Μάρτιος 2005) Δίνεται το ακόλουθο δυναμικό σύστημα δεύτερης τάξης:

$$y(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 6,25} U(s)$$

Θεωρούμε ότι, στη χρονική στιγμή $t=0$, η μεταβλητή εισόδου μεταβάλλεται βηματικά: $U(t) = 4H(t)$.

- α) Να υπολογίσετε τη χρονική απόκριση, $Y(t)$, της διεργασίας με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace (κατά προτίμηση να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Heaviside).
- β) Να υπολογίσετε το χρόνο στον οποίο εμφανίζεται το πρώτο μέγιστο της απόκρισης και την υπέρβαση (overshoot) της απόκρισης, $Y(t)$. Όλοι οι τύποι που θα χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν.
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $Y(t)$ ως προς t και να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις του ερωτήματος (β) από τα αποτελέσματα της γραφικής παράστασης.
- δ) Να προσδιορίσετε τη χρονική απόκριση της παραπάνω διεργασίας σε μια μοναδιαία παλμική μεταβολή και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.
- ε) Να προσδιορίσετε τη χρονική απόκριση της διεργασίας για πολύ μεγάλους χρόνους σε μια ημιτονοειδή μεταβολή της μεταβλητής εισόδου, $U(t) = \sin(t)$.
- ζ) Να κατασκευάσετε το πλήρες διάγραμμα BODE του δυναμικού συστήματος.

Άσκηση 6.12: (Θέμα εξετάσεων – Ιανουάριος 1999) Δίνεται η διεργασία δεύτερης τάξης:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s)$$

όπου ζ είναι ο συντελεστής απόσβεσης και $\omega_n = (1/\tau)$ είναι η φυσική γωνιακή συχνότητα της διεργασίας.

- α) Για ζ ($0 < \zeta < 1$) και για μοναδιαία βηματική μεταβολή $U(s) = 1/s$ να αποδείξετε, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, ότι η χρονική απόκριση $Y(t)$ δίνεται από την ακόλουθη αναλυτική λύση:

$$Y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

όπου $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

- β) Ακολούθως, για τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$Y(s) = \frac{2}{8s^2 + 4s + 2} U(s)$$

και για μία μοναδιαία βηματική μεταβολή της μεταβλητής εισόδου, $U(t)$, να προσδιορίσετε τη χρονική απόκριση της $Y(t)$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

- γ) Να υπολογίσετε το χρόνο ανύψωσης, t_r , το χρόνο στον οποίο εμφανίζεται το πρώτο μέγιστο της $Y(t)$, t_p , και την υπέρβαση, (B/A) , για τα δεδομένα του ερωτήματος (β).
Να αποδείξετε όλους τους τύπους που θα χρησιμοποιήσετε.

Άσκηση 6.13: (Θέμα εξετάσεων – Σεπτέμβριος 2006) α) Να υπολογίσετε, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, τη χρονική απόκριση της ακόλουθης συνάρτησης μεταφοράς:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Θεωρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων ζ και ω_n είναι τέτοιες ώστε οι μη μηδενικοί πόλοι της $Y(s)$ να είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί $(-a \pm i\omega)$ (όπου $a = \zeta\omega_n$ και $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$).

- β) Να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης:

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 + 4s + 5}$$

- γ) Να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της ρητής συνάρτησης:

$$Y(s) = 3 - \frac{s^2 + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Άσκηση 6.14: Θεωρούμε έναν αντιδραστήρα πλήρους ανάμιξης στον οποίο επιτελείται μία εξώθερμη χημική αντίδραση. Η θερμότητα που εκλύεται κατά την αντίδραση απομακρύνεται από το αντιδρών μίγμα στο ψυκτικό μέσο, που κυκλοφορεί στην εσωτερική ψυκτική σπείρα του αντιδραστήρα. Προκειμένου να διατηρήσουμε τη θερμοκρασία του αντιδρώντος μίγματος σταθερή, ρυθμίζουμε τη ροή του ψυκτικού μέσου με τη βοήθεια ενός αναλογικού ελεγκτή. Τα σχεδιαστικά χαρακτηριστικά του ελεγκτή είναι τέτοια, ώστε η θερμοκρασιακή απόκριση του ρυθμιζόμενου συστήματος σε διαταραχές στο ρυθμό ροής του ρεύματος τροφοδοσίας ή στη θερμοκρασία του ψυκτικού, να παρουσιάζει τα τυπικά χαρακτηριστικά της υποαποσβεσμένης απόκρισης ενός δευτεροβάθμιου δυναμικού συστήματος.

- α) Ένας χειριστής μεταβάλλει ξαφνικά το ρυθμό ροής του ρεύματος τροφοδοσίας στον αντιδραστήρα από 0,4 σε 0,5 kg/s και παρατηρεί ότι η θερμοκρασία του αντιδρώντος μίγματος μεταβάλλεται από την αρχική τιμή των 100°C στην τελική τιμή των 102°C. Να υπολογίσετε τη σταθερά ενίσχυσης του ρυθμιζόμενου δυναμικού συστήματος (κάτω από ρύθμιση ανάδρασης).
- β) Ο χειριστής παρατηρεί ότι μετά την είσοδο της παραπάνω διαταραχής, η χρονική απόκριση του δυναμικού συστήματος είναι ταλαντωτική και εμφανίζει την πρώτη και τη δεύτερη μέγιστη τιμή στην απόκριση της θερμοκρασίας στους 102,5°C και 102,1°C στις χρονικές στιγμές 1000s και 3060s, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς του δυναμικού συστήματος (δηλαδή, τις τιμές των τ και ζ).
- β) Ακολουθώς, να υπολογίσετε το χρόνο ανύψωσης, t_r , της παραπάνω χρονικής απόκρισης.

Άσκηση 6.15: Ένας μηχανικός για να μετρήσει τη θερμοκρασία του αντιδρώντος μίγματος σε έναν αντιδραστήρα συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης χρησιμοποιεί έναν πνευματικό αισθητήρα μεταβολής της πίεσης. Η έξοδος του πνευματικού αισθητήρα μεταβάλλεται στην περιοχή των 3 – 15 psig, και στέλνεται μέσω μιας σχετικά μακριάς πνευματικής γραμμής σε ένα καταγραφικό στην αίθουσα ελέγχου. Το όργανο αυτό είναι κατάλληλα βαθμονομημένο, έτσι ώστε οι τιμές που δίνει να είναι σε βαθμούς Κελσίου, (°C). Ο συνδυασμός πνευματικού αισθητήρα θερμοκρασίας/ πνευματικού μεταφορέα λειτουργεί σχεδόν σαν ένα δυναμικό σύστημα πρώτης τάξης, του οποίου η χρονική σταθερά ισούται με 3 sec. Ομοίως, η πνευματική γραμμή μεταβίβασης του σήματος από το μεταφορέα προς το καταγραφικό συμπεριφέρεται όπως μια διεργασία πρώτης τάξης, της οποίας η χρονική σταθερά είναι ίση με 10 sec. Ο μηχανικός παρακολουθώντας τις τιμές στην έξοδο του καταγραφικού παρατηρεί ότι η καταγραφόμενη θερμοκρασία εναλλάσσεται σχεδόν ημιτονοειδώς μεταξύ των τιμών 180°C και 183°C, με περίοδο 30s. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε σχετικά με την πραγματική θερμοκρασία στον αντιδραστήρα;

Άσκηση 6.16: (Θέμα εξετάσεων – Σεπτέμβριος 2004) Προκειμένου να περιγράψουμε τη δράση ενός φαρμάκου σε έναν ασθενή, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο δυναμικό μοντέλο:

$$\frac{dX_1}{dt} = -k_1 X_1(t) + U(t) \quad , \quad X_1(t=0) = 0$$

$$\frac{dX_2}{dt} = k_1 X_1(t) - k_2 X_2(t) \quad , \quad X_2(t=0) = 0$$

όπου $X_1(t)$, $X_2(t)$ και $U(t)$ είναι αντίστοιχα οι μεταβλητές απόκλισης της μάζας του φαρμάκου στο γαστροεντερικό σύστημα, $X_1(t)$, της μάζας του φαρμάκου στο αίμα, $X_2(t)$, και ο ρυθμός έγχυσης του φαρμάκου, $U(t)$.

α) Εάν ο ρυθμός έγχυσης του φαρμάκου στον ασθενή, ακολουθεί τη χρονική μεταβολή της Εικόνας 6.25 και $k_1 = 5,63 \text{ min}^{-1}$ και $k_2 = 12,62 \text{ min}^{-1}$, να υπολογίσετε τη χρονική μεταβολή της μάζας του φαρμάκου στο αίμα, $X_2(t)$. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της μεταβλητής $X_2(t)$ στην περίπτωση αυτή;

β) Εάν ο ρυθμός έγχυσης του φαρμάκου ακολουθεί το νόμο:

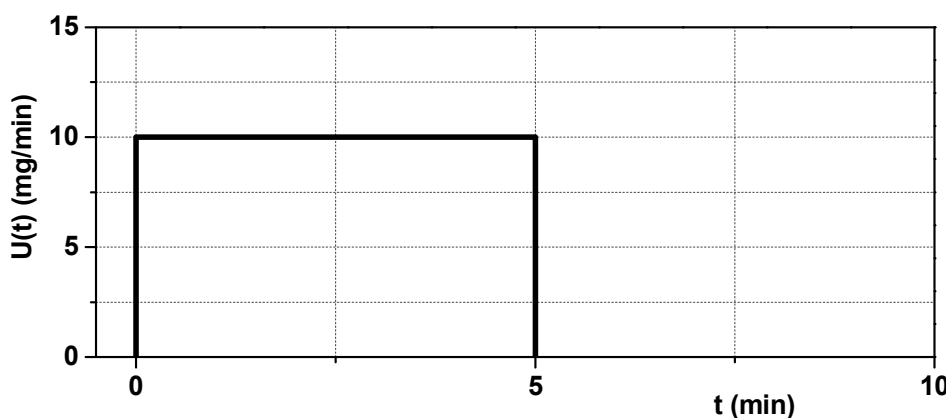
$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10e^{-k_2 t} & t \geq 0 \end{cases}$$

να επαναλάβετε τη λύση του προβλήματος (α).

γ) Εάν ο ρυθμός έγχυσης του φαρμάκου ακολουθεί το νόμο:

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10 \sin 2t & t \geq 0 \end{cases}$$

(δηλαδή ακολουθεί μια περιοδική μεταβολή μεγέθους 10 mg/min και συχνότητας 2 rad/min) να υπολογίσετε την περιοδική μεταβολή του $X_2(t)$ στη μόνιμη κατάσταση.



Εικόνα 6.25: Χρονική μεταβολή του ρυθμού έγχυσης του φαρμάκου.